



УДК 538.37/539:629.7.023

УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ЗАКРЕПЛЕННЫХ ГИБКОЙ НИТИ И ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ

С. С. Комаров, Н. Ю. Цвиленева, Н. И. Мискактин

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Решаются основные задачи волновой динамики гибких нитей и упругих мембран. Достоверность предложенного авторами численного алгоритма расчета упругой деформации пневмоконструкций при динамическом нагружении подтверждается при сравнении с результатами известных исследований, полученных аналитическими и численными методами.

Ключевые слова: гибкая нить, мембраны, продольные и поперечные волны, удар

1 Введение

При решении задач динамики мягкооболочечных конструкций сложной формы возникает естественные вопросы достоверности численного алгоритма и сходимости численного решения. С этой точки зрения представляет интерес решение классических задач об ударе по нити и мембране из нелинейно-упругого материала, имеющих аналитическое [2] и численное [3, 4] решения, в рамках, предложенной авторами [1] математической модели упругой деформации пневмоконструкций.

Особенностью задач такого типа является значительное отклонение формы гибкой нити (мембраны) от прямолинейного (плоского) положения, нелинейная зависимость напряжений от деформаций, а также специфика граничных условий в области контакта нити с ударным телом. Исследование распространения продольных и поперечных волн с учетом перечисленных выше факторов представляет в математическом отношении достаточно сложную задачу.

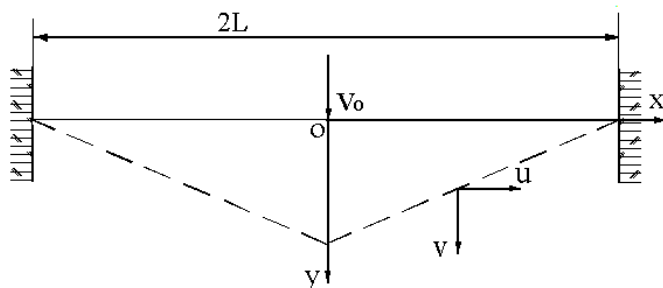


Рис. 1: К выводу уравнения движения нити

2 Постановка задачи

Пусть нить, имеющая в недеформированном состоянии длину $2L$, закреплена на концах с предварительным натяжением. При $t = 0$ с центром нити сталкивается точка бесконечной массы, которая имеет постоянную скорость \dot{v}_0 , направленную по нормали к нити (Рис. 1).

Введем безразмерные величины:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad (1)$$

где $c = (E/\bar{\gamma})^{1/2}$ — скорость звука в материале; $\bar{\gamma}$ — масса единицы длины нити; t — время; E — погонный модуль упругости.

Уравнение динамики нити записываются в виде [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{N}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial s_0} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{N}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial s_0} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2 &= (1 + \varepsilon)^2, \\ \lambda = 1 + \varepsilon &= \frac{\partial s}{\partial s_0}, \quad N(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad N(s_0, t) \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где s_0, s — дуговые лагранжевые координаты начальной и деформированной нити, λ — степень удлинения; ε — относительное удлинение; N — натяжение.

В этом случае система уравнений (2) решается при следующих начальных и граничных условиях:

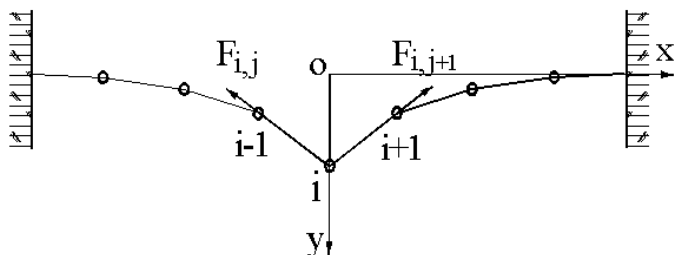


Рис. 2: К выводу дискретной модели движения нити

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(s_0, 0) &= x_0, & \bar{x}(1, \tau) &= x_0(1), \\
 \bar{y}(s_0, 0) &= x_0, & \bar{y}(1, \tau) &= 0, \\
 \bar{u}(s_0, 0) &= x_0, & \bar{u}(1, \tau) &= \bar{v}(1, \tau) = 0, \\
 \bar{v}(s_0, 0) &= \begin{cases} \bar{v}_0 & \text{при } s_0 = 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq s_0 \leq 1, \end{cases} & \bar{x}(0, \tau) &= 0, \\
 & & \bar{u}(0, \tau) &= 0, \\
 & & \bar{v}(0, \tau) &= v_0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

3 Численный алгоритм решения задач

Согласно рассматриваемого численного алгоритма [1], гибкая мембрана (нить) заменяется системой упругих стержней, работающих только на растяжение и соединенных между собой в узлах, в которых сосредоточена их масса. Узлы связаны между собой упругими и демпфирующими силами (Рис. 2).

Задача волнового взаимодействия мягкой осесимметричной мембраны (нити) с твердым телом сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения узлов образованной сети в виде:

$$\begin{aligned}
 m_{i,j} \ddot{x}_{i,j} + c_a \dot{x}_{i,j} + c_z (2\dot{x}_{i,j} - \dot{x}_{i,j-1} - \dot{x}_{i,j+1}) &= F_{x_{i,j}}(x, y), \\
 m_{i,j} \ddot{y}_{i,j} + c_a \dot{y}_{i,j} + c_z (2\dot{y}_{i,j} - \dot{y}_{i,j-1} - \dot{y}_{i,j+1}) &= F_{y_{i,j}}(x, y),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $(\ddot{x}, \ddot{y})_{i,j}$, $(\dot{x}, \dot{y})_{i,j}$ — соответственно проекции ускорения и скорости i -й точки j -го сечения мембраны (нити); c_a — коэффициент демпфи-

вания по абсолютной скорости точек; c_z — коэффициент демпфирования по скорости соседних точек нити друг относительно друга, который вводится для исключения высокочастотных осцилляций точек расчетной сетки; $m_{i,j}$ — масса выделенного элемента (нити).

Силы, действующие в узлах i, j равны:

$$\begin{aligned} F_{x_{i,j}}(x, y) &= K_{x_{i,j}}(x, y) + R_{x_{i,j}}(x, y), \\ F_{y_{i,j}}(x, y) &= K_{y_{i,j}}(x, y) + R_{y_{i,j}}(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{K}_{i,j}(x, y)$ — система упругих сил, возникающих в мембране (нити) при деформации под действием внешних сил; $\bar{R}_{i,j}(x, y)$ — система внешних сил.

Силы натяжения T_j связаны с перемещениями узлов по закону:

$$T_j = E_j \varepsilon_j, \quad (6)$$

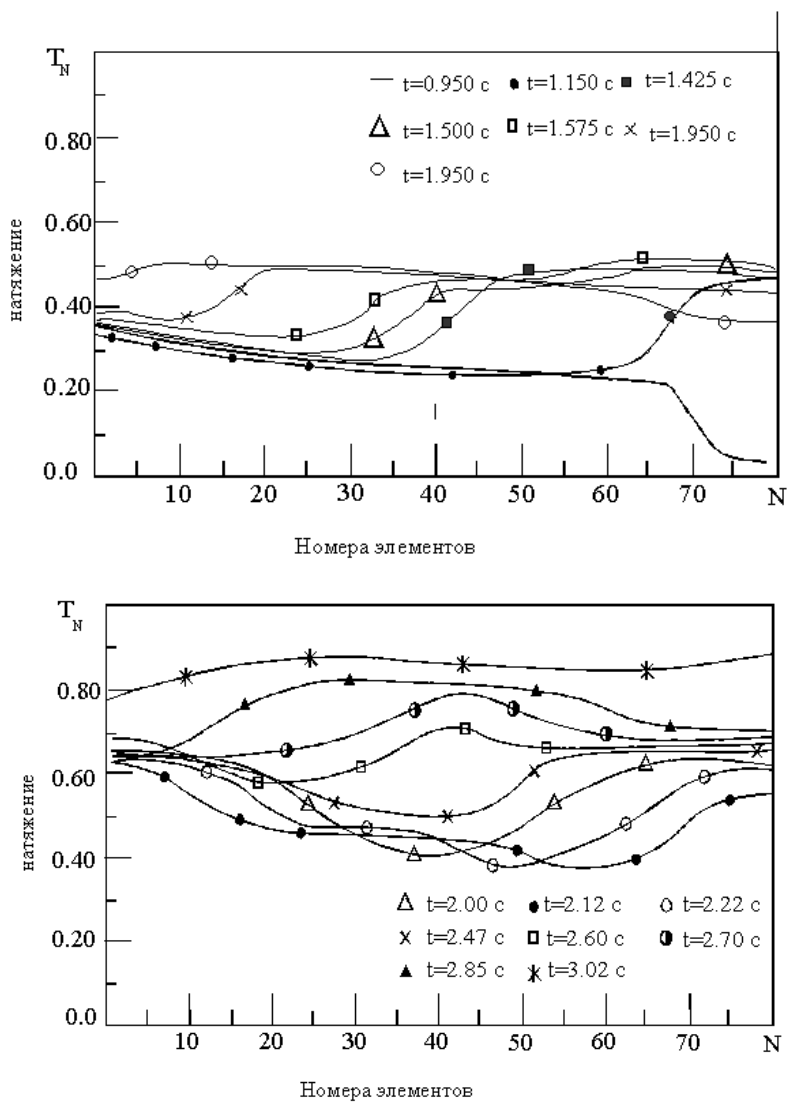
где E_j — погонный модуль упругости i -го элемента нити, $\varepsilon_j = \frac{l_{i,j} - l_{0,i,j}}{l_{0,i,j}}$.

4 Результаты численного исследования

Численные исследования для нити показали, что после отражения первичной продольной волны от заделки нити широтные T_0^S и меридиональные T_0^N натяжения в ней удваиваются, и в таком состоянии продольная волна встречается с передним фронтом поперечной волны. При их взаимодействии возникают вторичные продольные и две поперечные волны, движущиеся в разные стороны. В дальнейшем вторичные продольные волны отражаются от концов нити и от точки удара, а при взаимодействии накладываются на поперечные волны и т.д., вызывая последовательно скачкообразный рост суммарного натяжения в этих местах нити (Рис. 3(a), 3(b)). Полученные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными в работах [3, 4].

Применительно к мембране в качестве тестовой была решена задача о центральном ударе кругового цилиндра радиуса R с постоянной скоростью v_0 . Мембрана при этом моделировалась равномерной полярной сеткой густотой 80×90 . Удар цилиндра по мембране сопровождался образованием концентрических продольных и поперечных волн сильного разрыва (Рис. 4).

Расчеты показали, что широтные натяжения реализуются в зоне изгиба мембраны, расположенной между точками контакта с цилиндром и



(b)

Рис. 3: Фронт взаимодействия между собой поперечных и продольных волн при поперечном ударе по нити.

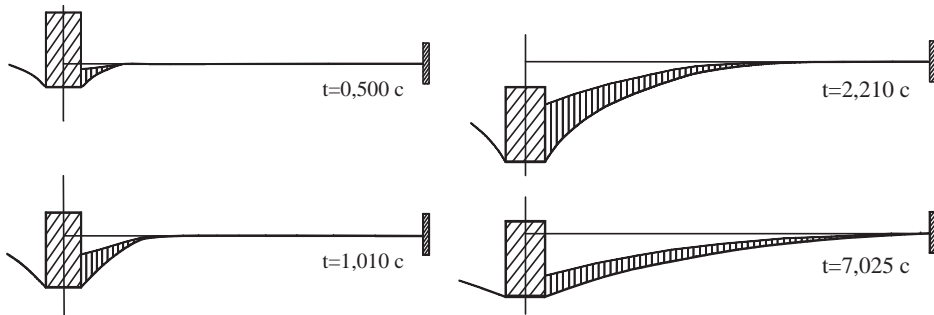


Рис. 4: Эпюры распределения поперечных натяжений при центральном ударе круглым цилиндром по упругой мембране

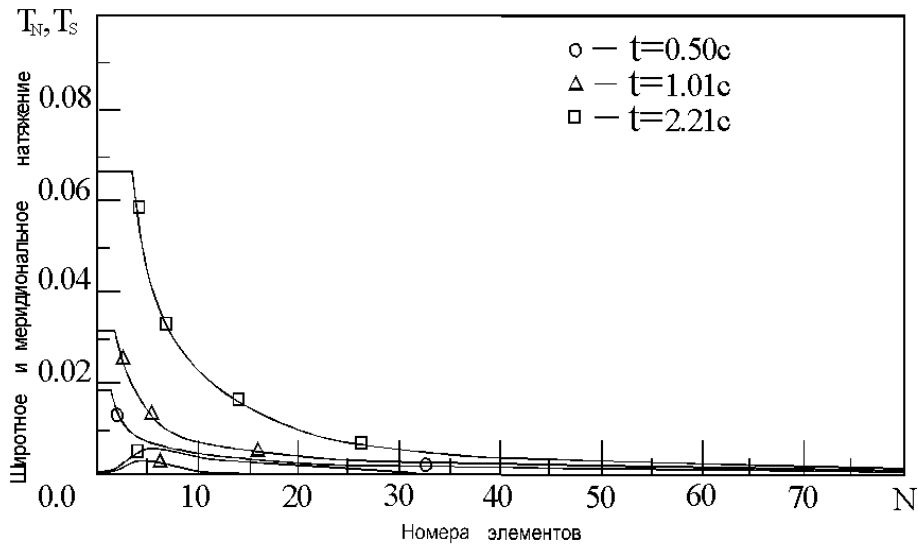


Рис. 5: Фронты распределения продольных и поперечных натяжений при центральном ударе круглым цилиндром по упругой мембране

фронтом поперечной волны. Их величина значительно меньше величины меридиональных натяжений, которые имеют максимальное значение в зоне контакта и далее резко падают, асимптотически приближаясь к нулю на границе мембраны. Волновые процессы в нити и мембране исследовались при изменении таких параметров, как коэффициент демпфирования и скорость центрального тела (Рис. 5).

Аналитическое решение задачи для мембраны при $v_0 = \text{const}$ приведено в работе [2]. Сходимость предложенного в работе численного алгоритма решения оценивалась путем расчета задачи при разной густоте сетки. Сравнение с аналитическим решением показало, что достаточная точность решения получается, начиная с $K = 20$, где K — число разбиений мембраны в меридиональном направлении.

Список литературы

- [1] Комаров С. С., Цвиленева Н. Ю., Мискактин Н. И. Динамика формообразования мягких конусообразных пневмокаркасных оболочек при взаимодействии с экраном // Современные конструкции с применением мягких гибких материалов: Сб. науч. тр. Владивосток: ДВГМА. 1994. С. 3–29.
- [2] Рахматуллин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Гостехтеоретиздат, 1961. 399 с.
- [3] Ридель В. В., Гулин Б. В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 205 с.
- [4] Исследования парашютов и дельтапланов на ЭВМ / Под ред. С. М. Белоцерковского. М.: Машиностроение, 1982. 240 с.