



УДК 621.452.3:681.5

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*В. В. Денисов*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Рассматривается подход к исследованию устойчивости нелинейных многосвязных систем автоматического управления с помощью быстрого преобразования Фурье и явления резонанса.

**Ключевые слова:** FFT (Fast Fourier Transform — быстрое преобразование Фурье), резонанс, нелинейные многосвязные системы автоматического управления, устойчивость периодических движений

---

Известно, что проблема устойчивости является одной из важнейших проблем теории автоматического управления [1]. К решению этой проблемы исследователю приходится возвращаться практически заново при проектировании новых классов динамических объектов и их систем управления.

Сложный технический объект, например, энергоустановка, состоящая из синхронного генератора и газотурбинного двигателя с системой топливопитания природным газом, относится к классу нелинейных многосвязных многоконтурных объектов управления, имеющих в своем составе еще и местные положительные обратные связи, и звенья с распределенными параметрами, и т.п.

Исследование устойчивости систем автоматического управления объектами подобного класса сводится к решению двух взаимосвязанных задач. На первом этапе решается задача устойчивости положения равновесия линеаризованной системы управления. На втором — решается

задача поиска периодических движений в нелинейной системе управления, исследование их на устойчивость, а также определение параметров автоколебательных режимов, если таковые имеются. В случае выявления неустойчивых режимов функционирования системы производится коррекция ее структуры и параметров, доработка как принципиальной схемы, так и схемы ее технической реализации.

К решению обеих вышеназванных задач устойчивости целесообразно применять частотные методы [2]. Во-первых, они позволяют использовать экспериментально снятые частотные характеристики, причем под экспериментом здесь следует понимать не только физический, но и вычислительный эксперимент. Во-вторых, они могут быть в равной мере применимы для звеньев с распределенными параметрами, для неминимально-фазовых звеньев, для звеньев с запаздыванием и т.д. В-третьих, они обеспечивают хорошую наглядность инженерных расчетов. В-четвертых, они в достаточной мере сочетаются с методами описания многосвязных систем на уровне индивидуальных подсистем и характеристик связи между ними и т.д.

Для исследования нелинейных многосвязных систем автоматического управления практически единственным методом до настоящего времени являлся метод гармонической линеаризации. Суть этого метода достаточно хорошо освещена в литературе [1]. Однако из практики также известны случаи, когда этот метод давал весьма приближенные, а то и полностью неверные результаты. Происходило это в том случае, если при применении метода не выполнялось «условие фильтра». Поскольку современные системы управления относятся к классу многомерных многоконтурных, имеют множество нелинейностей как в прямых, так и в перекрестных каналах управления, а также неминимально-фазовые звенья в своем составе, то можно с уверенностью утверждать, что для них «условие фильтра» может не выполняться. Следовательно, использование метода гармонической линеаризации часто оказывается неэффективным, а потому необходимо искать новые подходы к решению поставленных задач.

Решение первой из вышеперечисленных задач сводится к выделению областей устойчивости в пространстве варьируемых параметров (задача D-разбиения). В данной статье эту задачу не рассматриваем, поскольку она достаточно хорошо изучена [3].

Более подробно рассмотрим вторую задачу: задачу поиска периодических движений в нелинейной системе управления, определения параметров автоколебательных режимов и способов их устранения.

Для ее решения обратимся все-таки к методу гармонической лине-

аризации. По своей сути этот метод не что иное, как частный случай преобразования Фурье, когда на представление нелинейной функции в виде тригонометрического ряда бесконечно большой длины накладываются ограничения на все гармоники, выше первой. В дальнейшем эта гармоника и используется для гармонической линеаризации нелинейного звена. Во избежание неточностей, связанных с отбрасыванием высших гармоник, используем для анализа устойчивости нелинейных МСАУ понятие спектральной характеристики, полученной при помощи интеграла Фурье [4]:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (1)$$

где  $f(t)$  — исследуемая временная функция;  $F(\omega)$  — ее спектральная характеристика;  $\omega$  — частота (круговая).

На практике вместо интеграла Фурье используют дискретное быстрое преобразование Фурье (Fast Fourier Transform), формулы которого различаются в зависимости от конкретной реализации алгоритма вычисления. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанный на формуле (1), нашел наиболее широкое применение при анализе электрических сигналов в аналоговых и цифровых устройствах, при определении несущей частоты радиосигнала и т.п. в виду своей достаточной простоты реализации в цифровых вычислительных устройствах.

Развивая далее мысль о возможности использования известных результатов в какой-либо области знаний применительно к теории систем автоматического управления, обратим внимание на такое явление как резонанс [5].

Известно, что если собственная частота колебаний в системе совпадает (или, в более общем случае, кратна) с частотой колебаний возмущающего воздействия, то в системе наблюдается явление резонанса. При этом в многомерных системах, имеющих несколько собственных частот, возможны явления так называемых локальных резонансов, вызванных взаимным влиянием подсистем друг на друга.

На основе вышесказанного представляется целесообразно использовать явление резонанса для выявления возможных частот автоколебательных режимов в нелинейных системах управления. Программная среда «Matlab» [6] содержит функции для прямого и обратного быстрого преобразования Фурье. Прямое преобразование Фурье переводит описание сигнала из временной области в частотную, а обратное — из частотной области во временную.

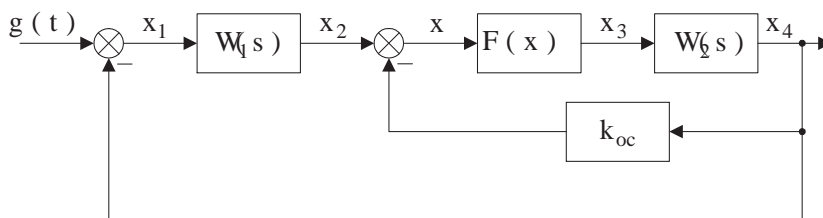


Рис. 1: Структурная схема нелинейной САУ

Рассмотрим возможность применения БПФ и явления резонанса для определения частоты автоколебаний на примере одномерной нелинейной системы автоматического управления, для которой известно точное решение данной задачи [1].

### Пример 1.

Структурная схема одномерной нелинейной САУ показана на Рис. 1.

На данной схеме введены обозначения:

$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}; \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}; \quad F(x) = c \cdot \text{sign}(x);$$

$k_{oc}$  — коэффициент жесткой обратной связи.

Известно точное решение относительно определения частоты и амплитуды автоколебаний:

$$\omega_T = \sqrt{\frac{k_1 + k_{oc}}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k_{oc})}}; \quad a_c = \frac{4ck_2 T_1 (k_1 T_2 - k_{oc} T_1)}{\pi(T_1 + T_2)}. \quad (2)$$

Зададим параметры системы и определим частоту автоколебаний на основании сделанных предположений.

$$W_1(s) = \frac{1}{0.2s + 1}; \quad W_2(s) = \frac{0.5}{s(0.5s + 1)};$$

$$F(x) = 2 \cdot \text{sign}(x); \quad k_{oc} = 0.2.$$

График переходного процесса и режим установившихся автоколебаний показан на Рис. 2.

Определим частоту полученных автоколебаний с помощью БПФ. На Рис. 3 показан график спектральной плотности выходного сигнала исследуемой системы.

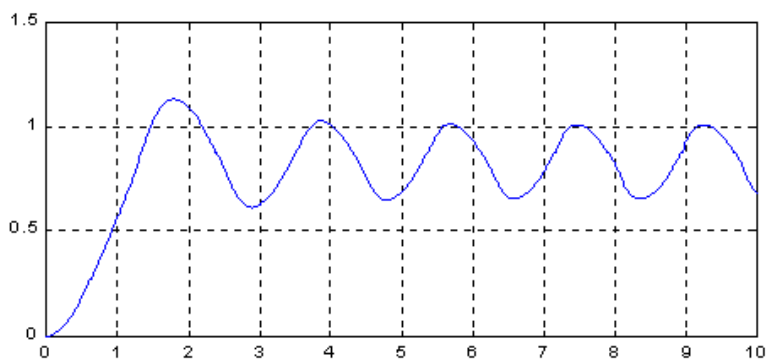


Рис. 2: График переходного процесса и установившихся автоколебаний в нелинейной САУ

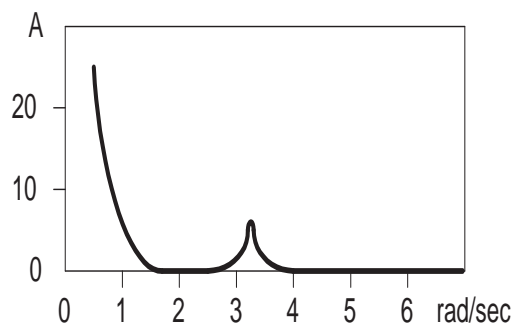


Рис. 3: График спектральной плотности САУ

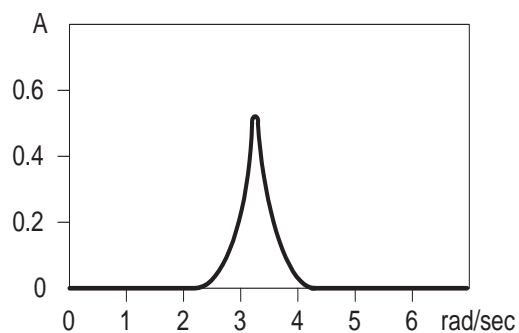


Рис. 4: График спектральной плотности САУ при синусоидальном входном воздействии с единичной амплитудой

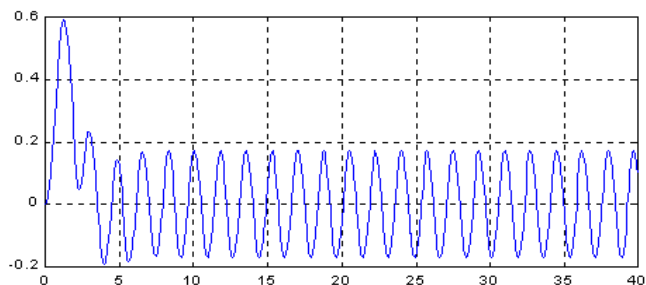


Рис. 5: Переходный процесс в САУ при синусоидальном входном воздействии с единичной амплитудой и автоколебательным режимом на выходе

На данном графике показано, что основной частотой разложения выходного сигнала САУ на спектр является частота, близкая к 0.1 рад/сек, однако есть еще одна составляющая ( $\omega \approx 3.5 \div 3.7$  рад/сек), которая может претендовать на частоту автоколебаний. Для проверки данного утверждения подадим на вход системы синусоидальное воздействие с единичной амплитудой и частотой 3.6 рад/сек. График спектральной плотности показан на Рис. 4.

На данном графике введено обозначение  $A$  — относительная амплитуда выходного сигнала, получающаяся при использовании FFT-Blokset.

Данной спектральной плотности соответствует график переходного процесса с режимом установившихся автоколебаний, показанный на Рис. 5.

По результатам переходного процесса (Рис. 4, 5) можно сделать вывод, что амплитуда автоколебаний в исследуемой системе будет:

$$a_c \approx 0.15...0.17;$$

и частота:

$$\omega_c \approx 3.5...3.7 \text{ рад/сек.}$$

При точном решении получим по формулам (2):

$$a_c = 0.167; \quad \omega_c = 3.61 \text{ рад/сек.}$$

Таким образом, в среде «Matlab» технология исследования периодических движений в нелинейных системах сводится к следующему:

1. На вход любой системы подается ступенчатое воздействие единичной амплитуды (в случае описания САУ нелинейными дифференциальными уравнениями амплитуда сигнала не должна превышать 1% отклонения от базового (установившегося) значения), при этом выходной негармонический сигнал раскладывается на спектр частот при помощи быстрого дискретного преобразования Фурье.
2. По полученному графику спектральной плотности определяются пики амплитуды и соответствующие им частоты. Эти частоты и будут претендентами на частоты автоколебательных режимов. В случае отсутствия пиков требуется повторить п. 1 с не нулевой несущей частотой.
3. На вход системы подается гармонический сигнал с постоянной амплитудой и одной из претендующих на автоколебания частот, при этом выходной сигнал раскладывается на спектр при помощи быстрого дискретного преобразования Фурье. Производится анализ спектральной плотности сигнала на появление резонансного пика амплитуды на заданной частоте.
4. В случае появления резонансного пика данная частота будет являться частотой автоколебаний в системе. В этом случае необходимо произвести параметрические или структурные изменения САУ для сдвига данной частоты в нерабочую область.

Покажем возможность применения данной методики на примере системы автоматического управления, для которой получение аналитического решения достаточно сложно, а применение метода гармонической линеаризации даст заведомо неверный результат [7].

## Пример 2.

Структурная схема системы автоматического управления показана на Рис. 6:

На данной схеме введены обозначения:

$W_{ij}(s)$  — матричная передаточная функция объекта управления, у которой:

$$W_{11}(s) = \frac{1.15}{0.8s + 1}; \quad W_{12}(s) = \frac{1.73}{0.8s + 1};$$
$$W_{21}(s) = \frac{0.71(0.4s + 1)}{0.8s + 1}; \quad W_{22}(s) = \frac{0.92}{0.8s + 1};$$

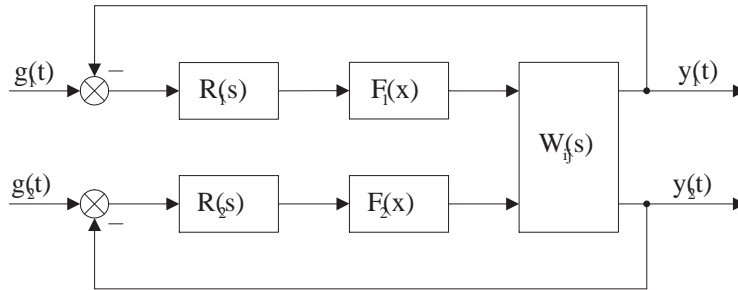


Рис. 6: Структурная схема нелинейной САУ

$F_i(s)$  — нелинейная характеристика в каждом из каналов, имеющая вид, представленный на Рис. 7.

На данном рисунке введены обозначения:  $b$  — величина зоны нечувствительности;  $c$  — параметр релейной характеристики. При моделировании данной схемы они имели значения:

$$b_1 = b_2 = 0.1; \quad c_1 = c_2 = 20.$$

$R_i(s)$  — передаточные функции регуляторов сепаратных каналов. При моделировании данной схемы они имели значения:

$$R_1(s) = R_2(s) = \frac{1}{0.1s + 1}.$$

Произведем исследование данной системы автоматического управления по предложенной выше методике.

В режиме совместного управления по двум каналам графики переходных процессов и соответствующие им спектральные характеристики имеют вид, представленный на Рис. 8, 9, 10, 11 соответственно.

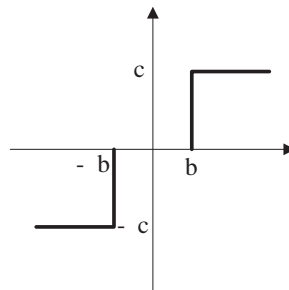


Рис. 7: Характеристика нелинейного элемента



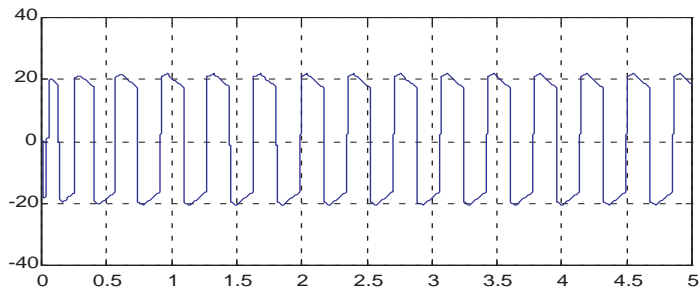


Рис. 8: Переходный процесс первого канала с нелинейным автоколебательным режимом

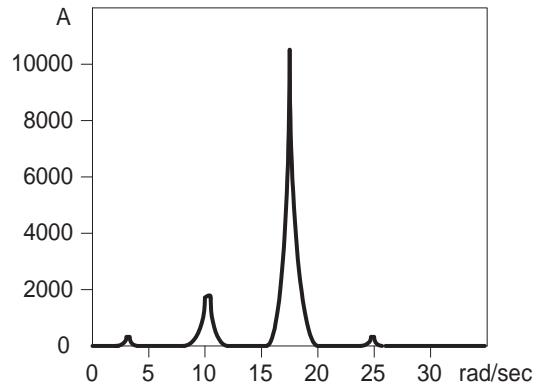


Рис. 9: Спектральная характеристика первого канала

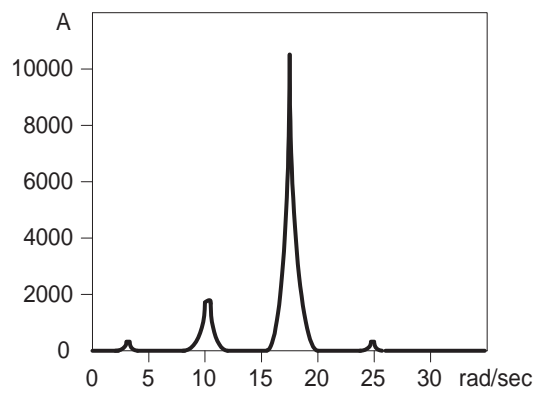


Рис. 10: Спектральная характеристика первого канала

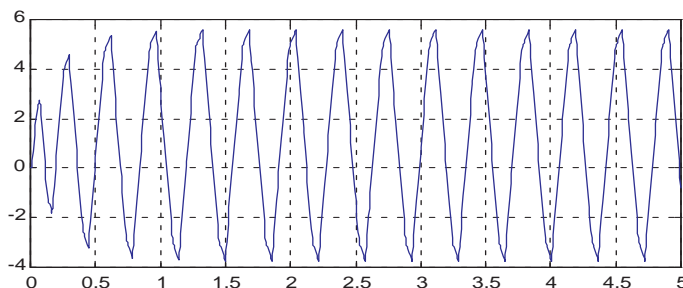


Рис. 11: Переходный процесс второго канала с нелинейным автоколебательным режимом

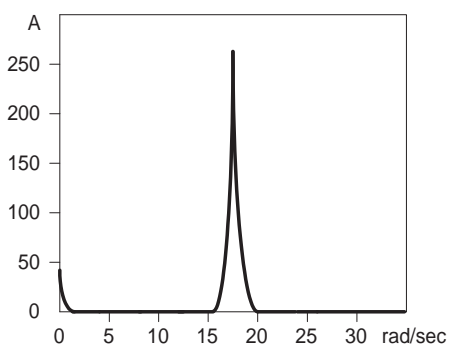


Рис. 12: Спектральная характеристика второго канала

Анализируя полученные результаты по предложенной методике, можно сделать следующие выводы: система носит ярко выраженный автоколебательный характер; на спектральной характеристике первого канала присутствуют следующие частоты — 2.5 рад/сек, 10.1 рад/сек, 17.5 рад/сек, 25 рад/сек, 31.5 рад/сек; на спектральной характеристике второго канала — 10.1 рад/сек, 17.5 рад/сек.

Спектральные характеристики обоих каналов имеют две совпадающие частоты — 10.1 рад/сек и 17.5 рад/сек, но при этом только на частоте 17.5 рад/сек имеется характерный для резонансного пик амплитуды спектральной характеристики. Следовательно, именно частота 17.5 рад/сек будет претендующей на частоту автоколебаний данной системы автоматического управления.

Произведя проверку сделанного предположения путем подачи на вход обоих каналов управления синусоидальный (гармонический) сигнал единичной амплитуды и претендующей частоты получены аналогичные представленным на Рис. 8, 9, 10, 11 графики переходных процессов и соответствующих им спектральных характеристик.

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что в системе будут наблюдаться устойчивые автоколебания на частоте 17.5 рад/сек.

Таким образом показана возможность применения быстрого дискретного преобразования Фурье для определения возможных параметров автоколебаний в нелинейных системах автоматического управления на примере системы, для которой известно аналитическое решение.

## Список литературы

- [1] Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Наука, 1988. 256 с.
- [2] Кузовков Н. Т. Динамика систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1968. 428 с.
- [3] Бабак С. Ф., Васильев В. И., Ильясов Б. Г. и др. Основы теории многосвязных систем автоматического управления летательными аппаратами: Учеб. пособие / Под ред. М. Н. Красильщикова. М.: Изд-во МАИ, 1995. 288 с.
- [4] Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
- [5] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
- [6] Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики. М.: Нолидж, 1999. 640 с.
- [7] Денисова Е. В. Анализ нелинейных многорежимных многоконтурных систем автоматического управления воздушно-реактивными двигателями: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Уфа, 1990. 293 с.