



# ВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ЖЕСТКУЮ СТЕНКУ, ПОКРЫТУЮ ПОРИСТЫМ СЛОЕМ

*С. В. Лукин*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Исследуется влияние нестационарных сил Бассэ-Буссинеска на отражение волны давления ступенчатого вида от твёрдой поверхности, покрытой пористым слоем, насыщенным жидкостью или газом. Изучение волновых процессов проводится в рамках модели многоскоростного континуума. Проведён сравнительный анализ свойств пористых экранов, насыщенных жидкостью или газом. Установлена степень влияния нестационарной силы Бассэ-Буссинеска на отражение волны от твёрдой стенки, покрытой пористым веществом.

**Ключевые слова:** насыщенная пористая среда, сила Бассэ-Буссинеска, пористый слой.

---

## 1 Введение

Большинство сред, встречающихся в природе, имеют неоднородный состав. Они характеризуются, в отличие от гомогенных смесей, наличием макроскопических (по отношению к молекулярным масштабам) неоднородностей или включений. Между фазами может происходить интенсивный обмен массой, импульсом, энергией, что существенно сказывается на движении смеси. Эффекты неоднородности осложняют исследование таких сред и проявляются в наибольшей степени при распространении волн, возникающих при воздействии ударных и вибрационных нагрузок.

В данной работе изучение волновых процессов проводится в рамках представления двухфазной среды с помощью совокупности двух взаимопроницающих и взаимодействующих континуумов, заполняющих один и

тот же объём [1, 4].

Для описания макроскопического движения двухфазной смеси примем допущения о сплошности среды в целом и каждой её составляющей в отдельности. В качестве отдельных дисперсных фаз выделяем такие включения, которые удовлетворяют следующим условиям [4]:

1. Минимальный размер включения или неоднородности много больше молекулярно-кинетических размеров.

Это допущение позволяет исследовать поведение единичных включений и процессов около них независимо друг от друга с помощью классических методов и уравнений механики сплошных однофазных сред.

2. Размер неоднородностей много меньше расстояний, на которых макроскопические или осреднённые параметры смеси или фаз меняются существенно.

Это допущение позволяет описывать макроскопические процессы в гетерогенной смеси методами механики сплошной среды с помощью осреднённых или макроскопических параметров.

Наряду с вышеупомянутыми главными предположениями механики гетерогенных сред в настоящей работе дополнительно принимается ряд следующих допущений [1]:

1. Смесь монодисперсная, то есть в каждом элементарном макрообъёме все дисперсные частицы имеют одинаковый радиус;
2. Пренебрегаем энергией и другими эффектами хаотического и внутреннего движения дисперсных частиц;
3. Процессы дробления, коагуляции и образования новых частиц отсутствуют;
4. Отсутствует влияние особых свойств поверхностной фазы;
5. Пренебрежимо малы кинетическая энергия пульсационного движения и пульсационный перенос не только в твёрдой, но и в жидкой (газовой) фазах;
6. Вязкость жидкости (газа) учитываем только в силе межфазного взаимодействия.

## 2 Математическая модель

В работе рассматриваются волновые процессы в двухфазных средах, насыщенных жидкостью или газом. Исследуется влияние нестационарной силы Бассэ-Буссинеска на отражение волны давления ступенчатого вида от жёсткой стенки, покрытой пористой средой (жидкость–твёрдые частицы, газ–твёрдые частицы).

Рассмотрим плоское одномерное движение двухфазной среды на основе физических законов сохранения массы, импульса и энергии.

Уравнения сохранения массы имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $v_i$ ,  $\rho_i$  — массовая скорость и приведённая плотность  $i$ -й фазы. Нижний индекс  $i = 1, 2$  будем относить к параметрам флюида и скелета. В качестве флюида будет исследоваться жидкость или газ.

Уравнение импульсов для каждой фазы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} &= -\alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - F_{12}, \\ \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} &= -\alpha_2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2*}}{\partial x} + F_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ;  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ . Здесь  $\alpha_1$ ,  $p_1$  — пористость и давление жидкости или газа;  $\alpha_2$ ,  $\sigma_{2*}$  — объёмное содержание и приведённое напряжение твёрдой фазы;  $\rho_i^0$  — истинная плотность  $i$ -й фазы. В многоскоростной сплошной среде вводятся субстанциональные производные  $d_i/dt$  [4], связанные с движением  $i$ -й фазы. В рассматриваемой задаче выражения для таких производных записываются следующим образом:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}.$$

$F_{12}$  — сила взаимодействия между несущей фазой и включениями. Она представляется в виде суммы трёх сил: силы вязкого трения Стокса ( $F_\mu$ ); силы, связанной с воздействием «присоединённых масс», возникающей из-за ускорения движения включения относительно несущей среды, когда в последней возникают возмущения на расстояниях порядка размера включений ( $F_m$ ); силы Бассэ-Буссинеска, действующей на сферу во флюиде в момент  $t$  и зависящей от всей предыстории движения ( $F_B$ ). Для указанных

сил можно записать следующие соотношения [4]:

$$\begin{aligned} F_\mu &= \eta_\mu a_2^{-2} \alpha_1 \alpha_2 \mu_1 (v_1 - v_2), \\ F_m &= \frac{1}{2} \eta_m \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{d_1 v_1}{dt} - \frac{d_2 v_2}{dt} \right), \\ F_B &= 6 \eta_B \alpha_1 \alpha_2 a_2^{-1} \sqrt{\rho_1^0 \pi \mu_1} \int_0^t \left( \frac{d_1 v_1}{d\tau} - \frac{d_2 v_2}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_2$  — радиус твёрдых частиц, составляющих скелет пористой среды;  $\mu_1$  — динамическая вязкость жидкости или газа.

Влияние формы частиц и структуры среды учитывается в коэффициентах  $\eta_\mu$ ,  $\eta_m$  и  $\eta_B$ . Их значения выбираются из сопоставления с реперным экспериментом. При описании газонасыщенных пористых сред коэффициент  $\eta_\mu$  не может считаться постоянным, так как волновые процессы в них сопровождаются значительными величинами чисел Рейнольдса. Выражение для определения коэффициента силы сопротивления записывается следующим образом [1]:

$$\eta_\mu = \frac{3}{16} C_\mu \text{Re}_{12},$$

где  $\text{Re}_{12} = \frac{2a_2 \rho_1^0 |v_1 - v_2|}{\mu_1}$ , а  $C_\mu$  — коэффициент аэродинамического сопротивления.

При исследовании отражения волн давления в насыщенной жидкостью пористой среде предполагаем, что изменения температуры фаз в результате работы межфазных сил несущественны.

В газонасыщенной пористой среде уравнения для энергий записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} &= \frac{\alpha_1 p_1}{\rho_1^0} \frac{d_1 \rho_1^0}{dt} + F_{21} (v_2 - v_1) + Q_{21}, \\ \rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} &= \frac{\alpha_2 p_1}{\rho_2^0} \frac{d_2 \rho_2^0}{dt} + Q_{12} + \sigma_{2*} \frac{d_2 \varepsilon_{2*}}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_i$  — внутренняя энергия  $i$ -й фазы;  $\varepsilon_{2*}$  — деформация твёрдой фазы;  $Q_{ji}$  — интенсивности межфазного теплообмена. При отсутствии фазовых переходов выполняется условие [4]:

$$Q_{21} + Q_{12} = 0. \quad (5)$$

Здесь для  $Q_{12}$  выполняется условие:

$$Q_{12} = 3\alpha_2 a_2^{-2} \lambda_*(T_1 - T_2), \quad (6)$$

где  $T_i$  — температура  $i$ -й фазы;  $\lambda_* = \lambda_1 Nu$ . Число Нуссельта вычисляем с помощью эмпирической формулы А. Ф. Чудновского [6]:

$$Nu = \begin{cases} 2 + 0,106 Re_{12} Pr_1^{1/3}, & Re_{12} \leq 200; \\ 2,27 + 0,6 Re_{12}^{0,07} Pr_1^{1/3}, & Re_{12} > 200, \end{cases}$$

где число Прандтля  $Pr_1 = \frac{C_p \mu_1}{\lambda_1}$ ;  $C_p$  — удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении;  $\lambda_1$  — коэффициент теплопроводности газа.

Во многих работах, посвящённых исследованию насыщенных пористых сред, отмечается наличие вязкоупругих свойств при их деформировании. Частицы твёрдой фазы, которые образуют скелет пористой породы, контактируют между собой, будучи окружёнными вязкой жидкостью. Вследствие деформируемости частиц и их относительного смещения, сила, приложенная по нормали к площадке контакта, стремится вытеснить жидкость. Вязкость жидкости будет способствовать запаздыванию процесса вытеснения. Таким образом, деформацию скелета можно представить в виде эквивалентной модели Максвелла-Фойгта, которая соответствует стандартному вязкоупругому телу:

$$\frac{d_2 \sigma_{2*}}{dt} - E_{f*} \frac{d_2 \varepsilon_{2*}}{dt} = -\frac{1}{t_{20}} (\sigma_{2*} - E_{e*} \varepsilon_{2*}), \quad \text{где } \frac{d_2 \varepsilon_{2*}}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial x}. \quad (7)$$

Здесь  $E_{f*}$ ,  $E_{e*}$  — динамический и статический модули упругости;  $t_{20}$  — время релаксации частиц скелета.

Запишем уравнения состояния для твёрдой и жидкой фаз в пористой среде насыщенной жидкостью. Примем, что материалы фаз акустически сжимаемы, следовательно, можно записать следующие уравнения:

$$p_i - p_0 = C_i^2 (\rho_i^0 - \rho_{i0}^0), \quad (8)$$

где  $C_i = (\rho_{i0}^0 \beta_i)^{-1/2}$  — скорость звука в материале  $i$ -й фазы;  $\beta_i$ ,  $\rho_{i0}^0$  — её сжимаемость и начальная истинная плотность. В соответствии с уравнением совместности деформаций имеет место следующее равенство:

$$p_2 = p_1 + \frac{p_{2*}}{\alpha_2}, \quad (9)$$

где  $p_{2*} = -\nu \sigma_{2*}$ ;  $\nu$  — модуль Пуассона;  $p_{2*}$  — приведённое давление жидкости.

При выборе уравнения состояния для газонасыщенной пористой среды целесообразно ввести следующую гипотезу: материал твёрдой фазы несжимаем. Для газа в поровом пространстве примем уравнения состояния совершенного политропного газа:

$$p_1 = \rho_1^0 R T_1, \quad u_1 = C_{V1} (T_1 - T_0), \quad (10)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $C_{V_1}$  — удельная теплоёмкость жидкости при постоянном объёме;  $T_0$  — начальная температура пористой среды. В качестве уравнений состояния твёрдой фазы с учётом её несжимаемости запишем следующие соотношения:

$$\rho_2^0 = \rho_{20}^0, u_{2t} = C_2(T_2 - T_0), \quad (11)$$

где  $C_2$  — удельная теплоёмкость твёрдой фазы.

Система уравнений (1), (2), (7) содержит 11 искомых функций и 9 соотношений, поэтому для замыкания системы используем выражения для силового взаимодействия фаз (3) и уравнения (8), (9). Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений двухскоростного движения пористой среды, насыщенной жидкостью, которая состоит из 12 соотношений и 12 искомых функций ( $\rho_1, \rho_2, \rho_1^0, \rho_2^0, v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, \sigma_{2*}, \varepsilon_{2*}$ ).

Для математической модели газонасыщенной пористой среды используем уравнения (1), (2), (4), (7), (10), (11), которые содержат 15 соотношений и 15 искомых функций ( $\rho_1, \rho_2, \rho_1^0, v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2, p_1, T_1, T_2, \sigma_{2*}, \varepsilon_{2*}, u_1, u_2, u_{2T}$ ). Выражения для силового взаимодействия фаз, как и в случае среды насыщенной жидкостью, определим с помощью соотношений (3). Интенсивность межфазного теплообмена определяется выражением (6). Таким образом, получили замкнутую систему, описывающую двухскоростное движение газонасыщенной пористой среды.

Исследование гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши применительно к системе дифференциальных уравнений двухскоростного движения дисперсных сред изложено в работах [4, 9, 10].

### 3 Численное решение

Численное исследование проведём при помощи двухшагового метода Лакса-Вендроффа [5]. При постановке граничных условий на левой границе расчётной области будут использоваться условия протекания:

$$\vec{\psi}_1^n = \vec{\psi}_2^n, \quad (12)$$

где  $\vec{\psi} = \{\rho_1, \rho_2, v_1, v_2, \sigma_{2*}, \varepsilon_{2*}\}$  для пористой среды, насыщенной жидкостью, или  $\vec{\psi} = \{\rho_1, \rho_2, v_1, v_2, T_1, T_2, \sigma_{2*}, \varepsilon_{2*}\}$  для газонасыщенной пористой среды. На правой границе задаём условие отражения, на которой для скоростей фаз имеем:

$$v_1^n(N) = -v_1^n(N-1), v_2^n(N) = -v_2^n(N-1). \quad (13)$$

Компьютерный код, написанный в соответствии с конечно-разностным алгоритмом, был апробирован на решении тестовых задач. Проводилось

сравнение коэффициентов отражения, полученных в результате численного эксперимента в пористой среде, насыщенной жидкостью с коэффициентом, вычисленным по формуле Френеля [2]:

$$K_F = \frac{\rho C - \rho_{10}^0 C_{10}}{\rho C + \rho_{10}^0 C_{10}}, \quad (14)$$

где  $\rho C = \rho_{10} C_{10} + \rho_{20} D_{f*}$ ;  $\rho_{10}, \rho_{20}$  — начальная приведённая плотность жидкости и твёрдой фазы;  $C_{10}, D_{f*}$  — скорость звука в чистой жидкости и мгновенная скорость звука в скелете. Относительное расхождение результатов составило 7%.

В качестве тестового расчёта для модели газонасыщенной пористой среды была поставлена задача о поршне в газе с отражением ударной волны от твёрдой преграды. Давление отражения  $p_o$  оказалось равным теоретическому с точностью до 0,02 %, рассчитанному по формуле [3]:

$$p_o = \frac{(3\gamma - 1)p_e - (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_e + (\gamma + 1)p_0} p_e, \quad (15)$$

где  $p_e$  — давление волны;  $\gamma$  — показатель политропы.

По результатам численных расчётов можно судить о том, что волна давления после прохождения в насыщенную пористую среду приобретает двухволновую конфигурацию. Разделение связано со скоростной неравномерностью фаз. Первая составляющая, называемая «быстрой» волной, в пределах расчётной области распространяется практически без затухания. Это связано с тем, что в «быстрой» волне частицы обеих фаз находятся в сжатом состоянии. Их скорости направлены в одну сторону и близки по значению, поэтому межфазные силы почти не влияют на «быструю» волну. Вторая составляющая, называемая «медленной» волной, очень быстро затухает. Значения скоростей частиц в этой волне направлены в сторону, противоположную направлению распространения волны. Поэтому межфазное взаимодействие здесь проявляется сильнее.

Исследуем воздействие волны давления на твёрдую поверхность, покрытую пористой средой, насыщенной жидкостью при различных значениях  $\eta_B$ . В качестве пористого слоя используем систему «кварц–вода». Параметры (в том числе  $\eta_\mu$  и  $\eta_m$ ) среды выбирались при сопоставлении численного решения с экспериментальными данными, полученными в работе [7]. Толщина пористого слоя составляет 10 см, давление ударной волны  $p_e = 3$  атм, пористость  $\alpha_{10} = 0,25$ , размер твёрдых частиц  $a_{20} = 0,25$  мм,  $\rho_{10}^0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{10} = 1480$  м/с,  $\rho_{20}^0 = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{20} = 3750$  м/с,  $t_{20} = 500$  мкс,  $D_{e*} = 900$  м/с,  $D_{f*} = 1700$  м/с,  $\eta_\mu = 1400$ ,  $\eta_m = 0,15$ .

На Рис. 1 изображено изменение давления на жёсткой стенке покрытой пористой средой насыщенной жидкостью. Сплошная линия — расчёт

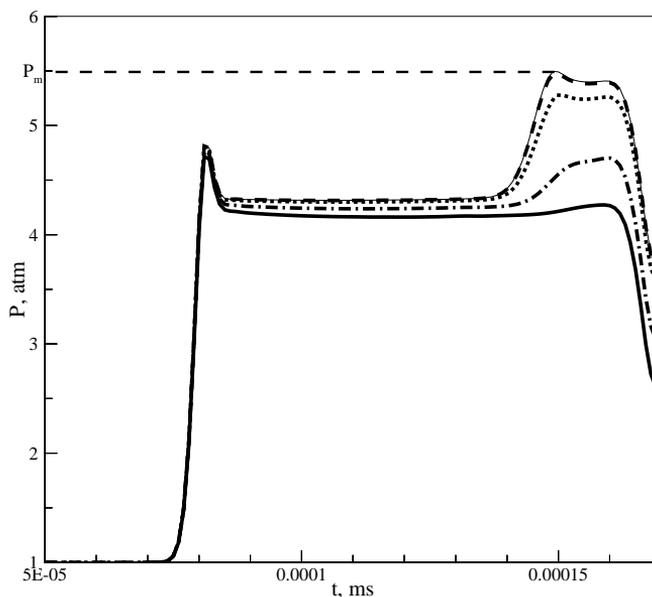


Рис. 1. Изменение давления на жёсткой стенке, покрытой пористой средой насыщенной жидкостью

без учёта силы Бассэ, пунктирная линия —  $\eta_B = 10$ , точечная линия —  $\eta_B = 100$ , штрихпунктирная линия —  $\eta_B = 500$ , жирная сплошная —  $\eta_B = 1000$ . Из графиков видно, что пористая среда, насыщенная жидкостью, дополнительно увеличивает динамическую нагрузку на твёрдую поверхность. Максимальное значение давления  $P_m \approx 5,5$  атм. Это происходит за счёт большей акустической жёсткости пористой среды по сравнению с чистой жидкостью. Видно, что при прохождении в насыщенную пористую среду исходный импульс приобретает двухволновую конфигурацию. На Рис. 1 скачок давления при  $t \approx 0,075 \cdot 10^{-3}$  мс соответствует набеганию быстрой составляющей волны давления на твёрдую стенку. Увеличение давления при  $t \approx 0,14 \cdot 10^{-3}$  мс соответствует столкновению «медленной» волны со стенкой. Падение давления при  $t \approx 0,16 \cdot 10^{-3}$  мс соответствует подходу волны разрежения, образованной отражением волны от границы «пористая среда–жидкость».

Наиболее эффективно сила Бассэ влияет на амплитуду «медленной» волны, уменьшая её скорость и значение. Быстрая составляющая волны давления слабее реагирует на увеличение «наследственных» эффектов, уменьшается только её амплитуда.

Параметры газонасыщенной среды выбирались при сопоставлении численного решения с экспериментальными данными, полученными в рабо-

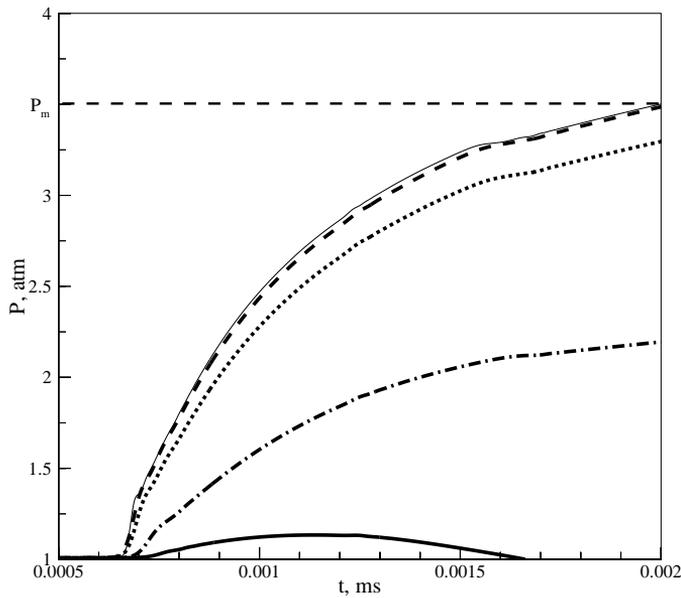


Рис. 2. Изменение давления на жёсткой стенке, покрытой пористой средой насыщенной воздухом

те [8]. Толщина пористого слоя составляет 10 см, давление ударной волны  $p_e = 2$  атм, пористость равна  $\alpha_{10} = 0,32$ , размер твёрдых частиц  $a_{20} = 1,6$  мм. Параметры системы «стекло–воздух»:  $\rho_{10}^0 = 1,19$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{10} = 330$  м/с,  $\rho_{20}^0 = 2750$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{20} = 2750$  м/с,  $t_{20} = 1000$  мкс,  $D_{e*} = 250$  м/с,  $D_{f*} = 450$  м/с,  $\eta_\mu = 2500$ ,  $\eta_m = 1,22$ .

На Рис. 2 показано изменение давления газа на жёсткой стенкеб покрытой пористой средойб насыщенной воздухом. Значения коэффициента  $\eta_B$  такие же как и на Рис. 1.

Прохождение волны давления в газонасыщенной пористой среде также сопровождается разделением на «быструю» и «медленную» волны. На Рис. 2 наблюдается лишь «медленная» волна, так как амплитуда быстрой составляющей мала. Поэтому влияние силы Бассэ в газонасыщенной среде более выражено, чем в среде, насыщенной жидкостью. Слой, насыщенный газом, также увеличивает амплитуду импульса ( $P_m \approx 3,5$  атм). Однако, при достаточно большом значении «наследственной» силы ( $\eta_B > 500$ ) происходит уменьшение нагрузки на жёсткую стенку. Сравнивая максимальные значения давления в пористой среде, насыщенной воздухом и водой, можно сделать вывод о том, что в газонасыщенной пористой среде исходный импульс затухает сильнее.

## 4 Выводы

Проведённые исследования позволили сделать следующие выводы:

1. Пористый слой, насыщенный жидкостью или газом, для рассмотренных систем дополнительно увеличивает динамическую нагрузку на поверхность.
2. Сила Бассэ-Буссинеска наиболее эффективно влияет на медленную составляющую волны давления.
3. В газонасыщенных пористых средах нестационарные (наследственные) эффекты проявляются сильнее.

## Список литературы

- [1] Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Урманчиев С. Ф. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 87–96.
- [2] Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1983. 496 с.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [4] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [5] Рихтмайер Р. Д., Мортон К. В. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 420 с.
- [6] Чудновский А. Ф. Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 441 с.
- [7] D. M. J. Smeulders On wave propagation in saturated and partially saturated porous media.-Eindhoven (Netherlands). 1992. 131 p.
- [8] C. J. Wisse On frequency dependence of acoustic waves in porous cylinders // Eindhoven (Netherlands). 1999. 199 p.
- [9] Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И., Нигматулин Р. И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // ПММ. Т. 46, № 1. 1982. С. 83-95.
- [10] Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твёрдыми или жидкими частицами // ПММ. Т. 29, № 3. 1965. С. 382–394.