УДК 532.516; 533

Моделирование колебаний пузырькового кластера в акустическом поле[1]

Э. Ш. Насибуллаева, И. Ш. Ахатов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Предложена математическая модель, описывающая динамику нелинейных колебаний газовых пузырьков в кластере под воздействием акустического поля. На основе данной модели были проведены анализ малых колебаний пузырьков в кластере, сравнение колебаний пузырька в монодисперсном кластере с колебаниями одиночного пузырька и исследование эффектов взаимодействия пузырьков в полидисперсном кластере, а также изучена диффузионная устойчивость пузырьков в моно– и полидисперсном кластерах.

Ключевые слова: пузырьковый кластер, математическая модель, частота свободных колебаний, синхронизация, диффузионная устойчивость

1 Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию явления сонолюминесценции как одиночного пузырька, так и множества пузырьков (так называемых пузырьковых облаков или кластеров), что объясняется важными перспективами использования этого явления в химической технологии. Интерес к исследованию пузырьковых кластеров также вызван тем, что облако более устойчиво к сильным акустическим полям, чем одиночный пузырек. Однако большинство экспериментальных и теоретических работ посвящены изучению сонолюминесценции одиночного пузырька, чья динамика может быть определена с помощью современных средств кино и фотографии высокой разрешающей способности. Однако очень трудно наблюдать движение поверхности индивидуальных пузырьков в больших скоплениях. Следовательно, развитие моделей, описывающих колебания пузырькового кластера под действием акустического поля, имеет большое значение.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–97912)

В настоящей работе представлена новая математическая модель, описывающая колебания сферического облака газовых пузырьков в акустическом поле. Предполагается, что размер кластера намного меньше, чем длина акустической волны, в этом случае давление внутри него можно считать однородным. В соответствии с данной моделью кластер рассматривается как большая капля, содержащая жидкость и большое количество микропузырьков. Радиальные движения его условной границы и радиусов пузырьков в общем удовлетворяют следующей системе уравнений ([1, 2]):

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_c - p_I}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C_l}\left[\dot{p}_c - \dot{p}_I\right], \tag{1}$$

$$a_i\ddot{a}_i + \frac{3}{2}\dot{a}_i^2 = \frac{p_{ai} - p_c}{\rho_l}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i a_i^2 \dot{a}_i = R^2\dot{R}, \tag{3}$$

$$p_{ai} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}}\right)\left(\frac{a_i}{a_{0i}}\right)^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{a_i} - \frac{4\mu\dot{a}_i}{a_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$p_I = p_0 - \Delta P \sin(\omega t). \tag{5}$$

Здесь n — число фракций с различными начальными радиусами пузырьков; $R = R(t)$ — радиус кластера; $a_i = a_i(t)$ — радиус пузырька в i-той фракции; $p_c = p_c(t)$ — давление жидкости в кластере; p_{ai} — давление газа около стенки пузырька i-той фракции; p_I — внешнее давление; ρ_l — плотность жидкости; C_l — скорость звука в жидкости; p_0 — начальное давление в жидкости; ΔP — амплитуда внешнего давления; ω — угловая частота; a_{0i} — начальный радиус пузырька i-той фракции; σ — коэффициент поверхностного натяжения; μ — вязкость жидкости, γ — показатель адиабаты; N_i — число пузырьков в i-той фракции и t — время. Отметим, что сжимаемостью жидкости внутри кластера можно пренебрегать только при достаточно высокой концентрации пузырьков (от 1% и выше), если же концентрация мала, то вместо уравнения (2) нужно рассматривать уравнение, учитывающее акустическое излучение от пузырьков внутрь кластера:

$$a_i\ddot{a}_i + \frac{3}{2}\dot{a}_i^2 = \frac{p_{ai} - p_c}{\rho_l} + \frac{a_i}{\rho_l C_l}\left[\dot{p}_{ai} - \dot{p}_c\right], \quad i = \overline{1, n}.$$

2 Динамика пузырьков в моно– и полидисперсном кластерах в сильном акустическом поле

Для исследования малых колебаний пузырьков в кластере был проведен линейный анализ системы уравнений (1–5). Было получено, что частота

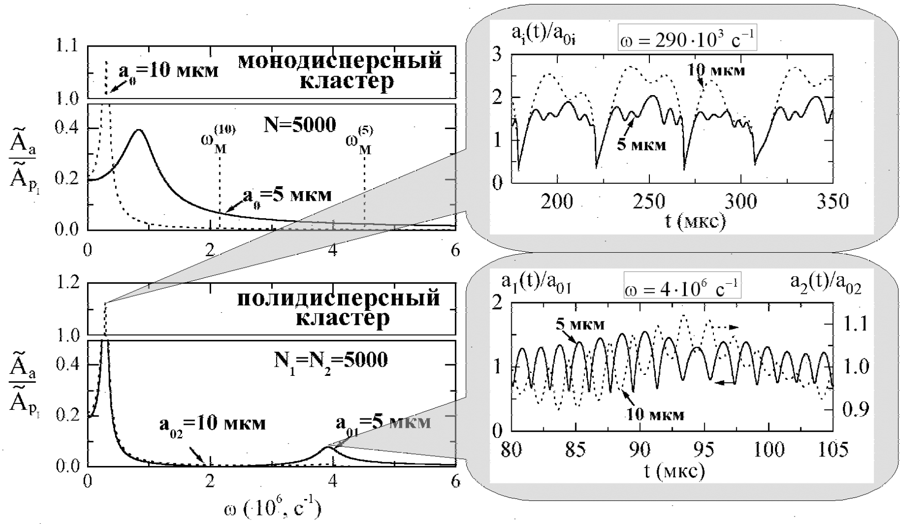

Рис. 1. Амплитудно—частотные характеристики для двух монодисперсных (слева сверху) и полидисперсного (слева снизу) кластеров и характеры колебаний пузырьков в полидисперсном кластере в области главного резонанса $\omega = 290 \cdot 10^3$ с$^{-1}$ (справа сверху) и вторичного резонанса $\omega = 4 \cdot 10^6$ с$^{-1}$ (справа снизу). Сплошная линия соответствует пузырькам с начальным радиусом 5 мкм, пунктирная линия — пузырькам с начальным радиусом 10 мкм

колебаний пузырьков в монодисперсном кластере в отсутствии акустического поля выражается формулой

$$\omega^2_{cluster} = \frac{3\gamma p_0 + \dfrac{2\sigma}{a_0}(3\gamma - 1)}{\rho_l a_0^2 \left(1 + \dfrac{a_0 N^{1/3}}{R_0}\left[N^{2/3} - 1\right]\right)} < \omega^2_{Minnaert},$$

где $\omega_{Minnaert}$ — частота свободных колебаний одиночного пузырька в безграничной жидкости (частота Миннаэрта).

Были получены выражения для амплитуды колебания пузырька в зависимости от частоты с учетом акустического поля. На Рис. 1 (слева) показана зависимость амплитуды от частоты для двух монодисперсных кластеров (при $n = 1$) и полидисперсного кластера (при $n = 2$). Видно, что главный (кластерный) резонанс меньше частоты Миннаэрта, которая на рисунке показана вертикальной пунктирной линией. В случае полидисперсного кластера в области миннаэртовских частот существует вторичный резонанс. Численные расчеты системы уравнений (1–5) показали, что в области главного резонанса пузырьки различных радиусов колеблются

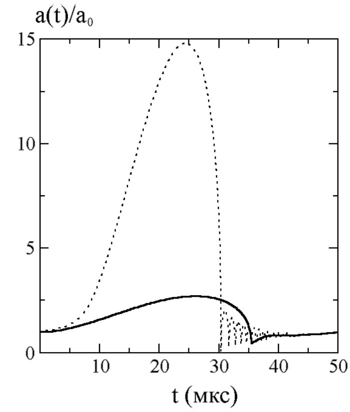

Рис. 2. Колебания одиночного пузырька (пунктирная линия) и пузырька в монодисперсном кластере (сплошная линия) за период акустического поля

в фазе (Рис. 1 (справа) при $\omega = 290 \cdot 10^3$ с$^{-1}$). Однако, в области вторичного резонанса они колеблются в противофазе — период расширения пузырьков первой группы совпадает с периодом сжатия пузырьков второй группы (при $\omega = 4 \cdot 10^6$ с$^{-1}$).

Для проведения численных расчетов здесь и далее использовались следующие значения физических параметров: $\rho_l = 10^3$ кг/м^3, $C_l = 1500$ м/с, $p_0 = 10^5$ Па, $\sigma = 0.073$ Н/м, $\mu = 10^{-3}$ Па·с, $\gamma = 1.4$ и значение начального радиуса кластера $R_0 = 10^{-3}$ м.

Было проведено сравнение динамики одиночного пузырька и пузырька в монодисперсном кластере. На Рис. 2 показаны характеры колебания одиночного пузырька (пунктирная линия) и пузырька в монодисперсном кластере (сплошная линия) одного начального радиуса $a_0 = 5$ мкм при одной и той же амплитуде внешнего давления $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па. Из рисунка видно, что характер колебания пузырька в монодисперсном кластере сильно отличается от характера колебания одиночного пузырька. Амплитуда колебаний и глубина коллапса у пузырька в кластере меньше, чем у одиночного пузырька. Кроме того в кластере пузырек может подвергаться воздействию бóльших амплитуд внешнего давления в отличие от одиночного пузырька, то есть кластер может существовать в сильном акустическом поле.

Также исследовалось влияние полидисперсности на динамику пузырьков в кластере. Был найден эффект синхронизации. А именно, в двух отдельных монодисперсных кластерах с разными начальными радиусами пузырьков их максимальное сжатие происходит в разные моменты времени. Но, если эти пузырьки поместить в один кластер (двухфракционный кластер), то их сжатие будет происходить в фазе, независимо от разме-

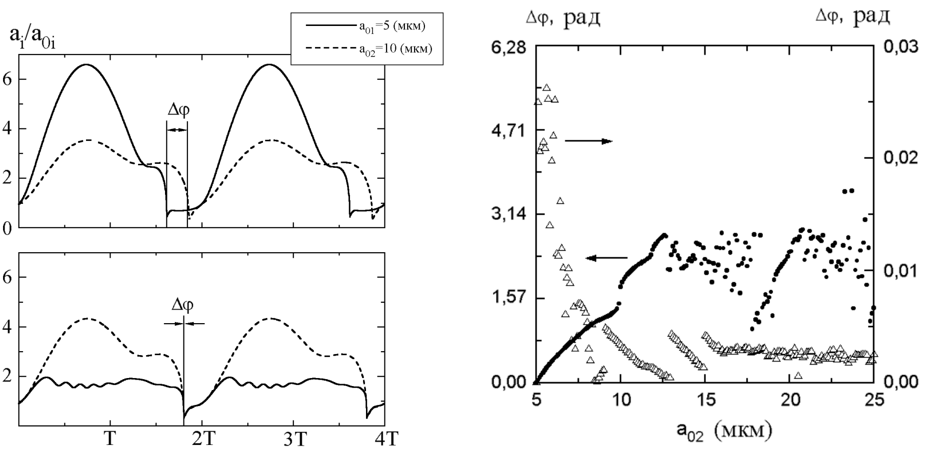

Рис. 3. Сравнение колебаний пузырьков в двух монодисперсных и двухфракционном кластерах при $\Delta P = 5 \cdot 10^5$ Па и $\omega = 2\pi \cdot 20$ кГц: (а) зависимость радиуса пузырька от времени, (б) разность фаз максимального сжатия

ра. Это продемонстрировано на Рис. 3(а). На Рис. 3(б) приведен график, иллюстрирующий зависимость от начального радиуса пузырьков во второй фракции разности фаз максимального сжатия пузырьков различных начальных радиусов, рассчитанной по формуле

$$\Delta\varphi = \varphi_1^{(col)} - \varphi_2^{(col)}; \quad \varphi_i^{(col)} = \omega t_i^{(col)}, \quad i = 1, 2,$$

где $t_i^{(col)}$ — момент времени, когда пузырек начального радиуса a_{0i} достигнет своего минимального значения. Начальный радиус пузырьков в первой фракции брался $a_{01} = 5$ мкм. Разность между фазами коллапса для двух монодисперсных кластеров показаны точками, а для двухфракционного кластера — треугольниками.

При некоторых значениях параметров синхронизация может привести к интенсификации коллапса пузырьков. Это означает, что добавление некоторого количества пузырьков одного радиуса в кластер, содержащий пузырьки другого радиуса может привести к более глубокому коллапсу последних. На Рис. 4 показана зависимость от общего числа пузырьков максимальной температуры в пузырьке начального радиуса 5 мкм в монодисперсном кластере (точки) и в двухфракционном кластере с фиксированным числом пузырьков в первой фракции (с пузырьками начального радиуса 5 мкм) N_1 =100, 500 и 1000 (треугольники, перевернутые треугольники и кресты). Число пузырьков во второй фракции с пузырьками начального радиуса 10 мкм меняется.

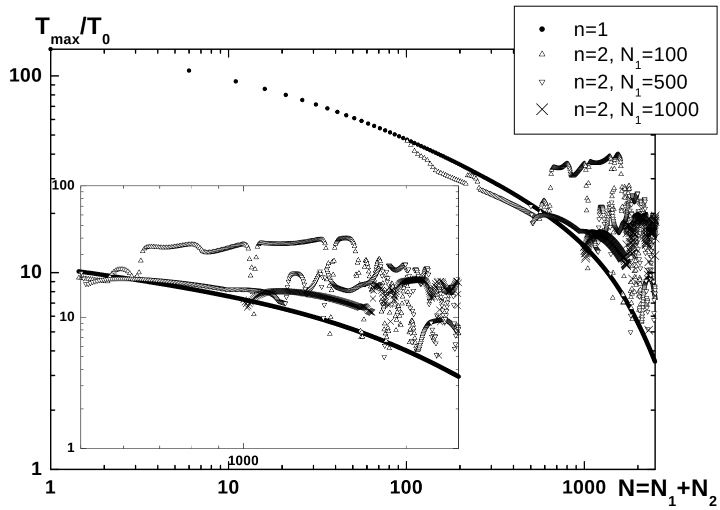

Рис. 4. Максимальная температура в пузырьке начального радиуса $a_{01} = 5$ мкм в зависимости от общего числа пузырьков в кластере при $\Delta P = 5 \cdot 10^5$ Па

3 Диффузионная устойчивость пузырьков в кластере

В данном параграфе исследуется диффузионная устойчивость пузырьков в монодисперсном и двухфракционном кластере. Для анализа диффузии в монодисперсном кластере использовался подход, изложенный в [3]. Только в уравнениях радиус пузырька $a(t)$ является решением системы уравнений (1–5) при $n = 1$.

На Рис. 5(а) (верхний график) показаны для сравнения нормированный максимальный радиус одиночного пузырька R_{max}/R_0, а на Рис. 5(б) — пузырька в кластере a_{max}/a_0 в зависимости от начального радиуса пузырька для амплитуд давления $\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па. Графики для одиночного пузырька впервые были получены в статье [4]. Максимальные отклики для пузырька в монодисперсном кластере для различных амплитуд давления находятся при том же размере начального радиуса, что и у одиночного пузырька. Однако величина отклика намного меньше. Например, для $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па резонансный радиус находится при $a_0 \approx 1.5$ мкм как для одиночного пузырька, так и для пузырька в кластере, но величина отклика в первом случае в 6,5 раз больше. На Рис. 6(а) показаны нормированные максимальные радиусы для пузырьков в более сильном акустическом поле ($\Delta P = 1 \div 4 \cdot 10^5$ Па). Видно, что с увеличением амплитуды давления растет и максимальный отклик. Резонансные кривые становятся более узкими.

На Рис. 5 (нижние графики) показаны кривые осредненной газовой

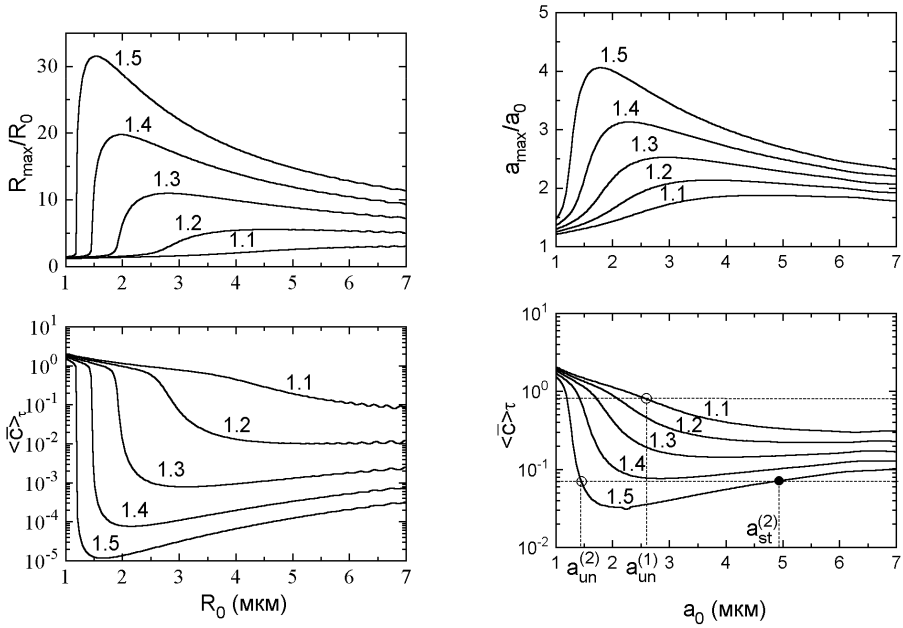

Рис. 5. Нормированный максимальный радиус (сверху) и средняя концентрация газа около стенки пузырька (снизу) в зависимости от начального радиуса при различных амплитудах давления ($\Delta P = 1.1 \div 1.5 \cdot 10^5$ Па) для (а) одиночного пузырька и (б) пузырька в кластере. Горизонтальные пунктирные линии обозначают различные уровни начальной концентрации газа $\bar{c}_\infty$ в жидкости, белый круг обозначает неустойчивый равновесный радиус, черный круг — устойчивый равновесный радиус

концентрации $<\bar{c}>_\tau$ около стенки пузырька для одиночного пузырька и пузырька в кластере в зависимости от начального радиуса пузырька для различных амплитуд давления. В данном диапазоне значений начального радиуса характер кривых для осредненной концентрации пузырька в кластере тот же, что и в случае одиночного пузырька. А именно, концентрация падает монотонно с увеличением начального радиуса до некоторого порогового значения амплитуды внешнего давления ΔP. Поскольку средняя скорость массы в пузырьке зависит только от разности между газовой концентрацией в жидкости $\bar{c}_\infty$ и осредненной концентрацией около стенки пузырька $<\bar{c}>_\tau$, то мы имеем следующее. Для данных амплитуд давления существует диапазон значений $\bar{c}_\infty$ при наличии одной равновесной точки $<\bar{c}>_\tau = \bar{c}_\infty$, которая является неустойчивой (белый круг при пересечении кривой и верхней пунктирной линии при $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$ Па). Эта равновесная точка соответствует значению начального радиуса $a_{un}^{(1)}$. При $a_0 < a_{un}^{(1)}$ пузырьки растворяются, а при $a_0 > a_{un}^{(1)}$ — растут до тех

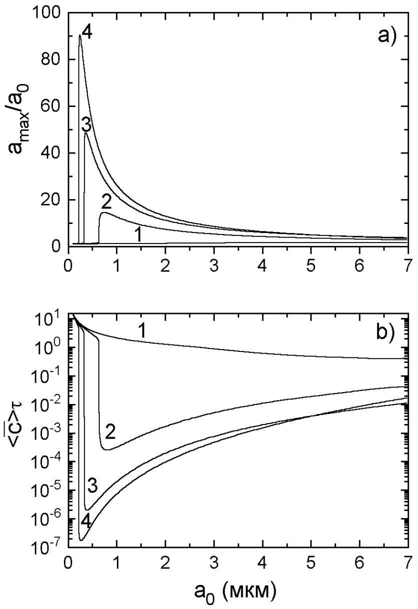

Рис. 6. a) Нормированный максимальный радиус пузырька и b) средняя концентрация газа около стенки пузырька в кластере в зависимости от начального радиуса для амплитуд давления $\Delta P = 1 \div 4 \cdot 10^5$ Па

пор, пока не разрушатся из-за неустойчивости поверхности. При превышении порогового значения ΔP в результате резонанса, показанного на верхнем графике, появляется глобальный минимум, характерный для малых начальных радиусов пузырька. При такой немонотонной зависимости $< \bar{c} >_\tau$ от a_0 существует диапазон значений $\bar{c}_\infty$, когда существуют две равновесные точки $< \bar{c} >_\tau = \bar{c}_\infty$. Неустойчивой точке (белый круг) соответствует значение радиуса $a_0 = a_{un}^{(2)}$, а устойчивой точке (черный круг) — $a_0 = a_{st}^{(2)}$. При $a_0 < a_{un}^{(2)}$, пузырьки растворяются пока не исчезнут, при $a_{un}^{(2)} < a_0 < a_{st}^{(2)}$ пузырьки растут до тех пор, пока не достигнут своего равновесного радиуса $a_{st}^{(2)}$, и, наконец, при $a_0 > a_{st}^{(2)}$ пузырьки растворяются, пока не достигнут $a_{st}^{(2)}$. Однако, в пузырьковом кластере равновесие становится возможным при более высоких (в несколько сотен раз) начальных концентрациях газа, чем в случае одиночного пузырька. Это означает, что для того, чтобы получить диффузионно устойчивый одиночный пузырек необходима хорошо очищенная от газа жидкость, в то время как в неочищенной жидкости наиболее вероятно появление пузырькового кластера, который будет также диффузионно устойчивым.

Из Рис. 6(б) видно, что с увеличением амплитуды акустического поля

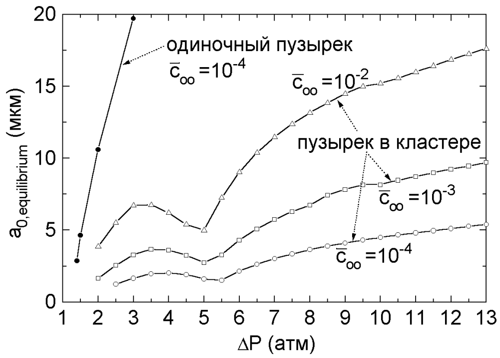

Рис. 7. Зависимость равновесного радиуса пузырька от амплитуды давления

диапазон значений концентрации $\bar{c}_\infty$, где возможна диффузионная устойчивость, расширяется. Кроме того, с уменьшением концентрации разность между устойчивой и неустойчивой точкой равновесия значительно уменьшается.

На Рис. 7 показана зависимость равновесного радиуса одиночного пузырька и пузырька в кластере (устойчивая точка равновесия) от амплитуды давления для различных значений начальной газовой концентрации в жидкости. Для одиночного пузырька эта зависимость монотонна, кроме того при амплитудах давления $\Delta P > 3 \cdot 10^5$ Па равновесный радиус становится очень большим и пузырек может разрушиться до того, как его достигнет из-за неустойчивости поверхности. Более того, эта зависимость возможна только при малых значениях $\bar{c}_\infty$. Следовательно, одиночный пузырек принципиально диффузионно неустойчив. В кластере наблюдается немонотонная зависимость равновесного радиуса от амплитуды давления. Кроме того, даже при больших амплитудах давления значение равновесного радиуса недостаточно большое, чтобы пузырек смог разрушиться из-за неустойчивости поверхности. Таким образом, пузырек в кластере диффузионно устойчив даже в сильном акустическом поле.

Ранее отмечалось, что в данном диапазоне значений начального радиуса характеры кривых для осредненных концентраций одиночного пузырька и пузырька в кластере мало отличаются друг от друга. Однако, если просчитать осредненную концентрацию для пузырька в кластере при больших значениях начального радиуса ($a_0 = 1 \div 15$ мкм) для амплитуды внешнего давления, например, $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па, то получим следующее (Рис. 8). При увеличении начального радиуса кривая максимального отклика пузырьков становится немонотонной (верхний график), появляются новые точки экстремума. При дальнейшем увеличении радиуса наблюдается также удвоение периода (бифуркации). Характер кривых для

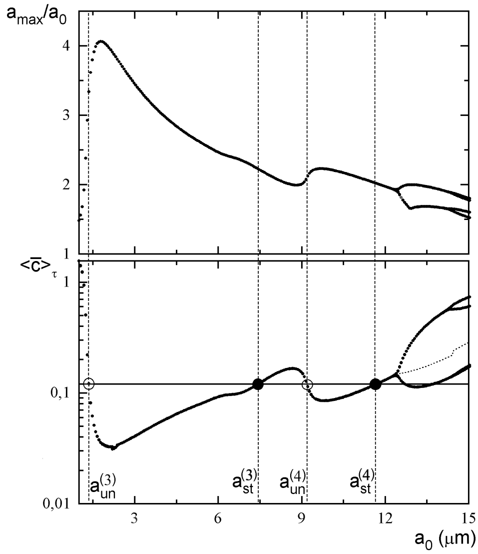

Рис. 8. Нормированный максимальный радиус (сверху) и средняя концентрация газа около стенки пузырька (снизу) в зависимости от начального радиуса для различных амплитуд давления $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па

осредненной концентрации газа около стенки пузырька также меняется (нижний график). При удвоении периода колебания пузырька кривая концентрации также раздваивается, поэтому здесь необходимо брать осреднение не по периоду акустического поля, а по периоду колебания пузырька (пунктирная кривая). Как и было разобрано ранее, при малых концентрациях $\bar{c}_\infty$ нет точек равновесия. При увеличении $\bar{c}_\infty$ появляются две точки равновесия (устойчивая и неустойчивая). Если же увеличивать $\bar{c}_\infty$ дальше, то появятся уже 4 точки равновесия (2 устойчивые и 2 неустойчивые). Этот случай изображен на Рис. 8 (черные круги соответствуют устойчивым точкам, белые — неустойчивым). Вертикальными пунктирными линиями показаны соответствующие им максимальные радиусы. При данных значениях начальной концентрации имеем следующее. При $a_0 < a_{un}^{(3)}$ пузырьки будут растворяться до полного исчезновения, при $a_{un}^{(3)} < a_0 < a_{st}^{(3)}$ и $a_{st}^{(3)} < a_0 < a_{un}^{(4)}$ пузырьки будут расти или растворяться соответственно, пока не достигнут равновесного размера $a_{st}^{(3)}$, при $a_{un}^{(4)} < a_0 < a_{st}^{(4)}$ и $a_0 > a_{st}^{(4)}$ пузырьки будут расти или растворяться соответственно пока не достигнут равновесного размера $a_{st}^{(4)}$.

Теперь рассмотрим двухфракционный кластер. Осредненная газовая концентрация газа около стенки пузырька в этом случае есть функция двух аргументов: $< \bar{c}_{a1}(a_{01}, a_{02}) >_\tau$, $< \bar{c}_{a2}(a_{01}, a_{02}) >_\tau$. На Рис. 9 показана осредненная концентрация газа для каждой фракции как функция началь-

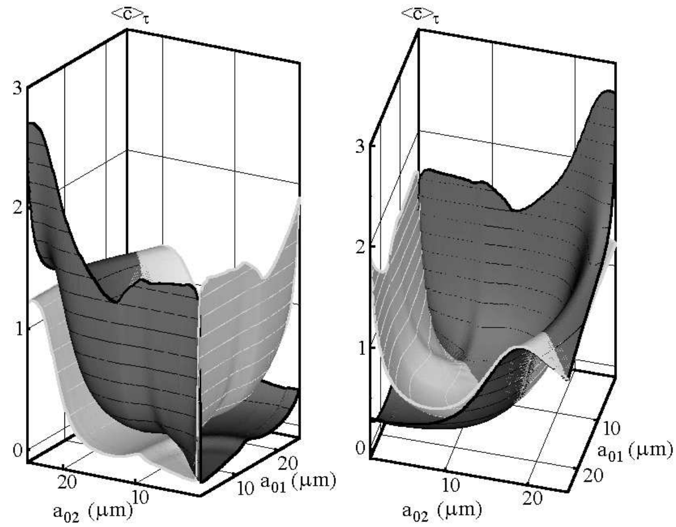

Рис. 9. Средние концентрации газа около пузырьков в двух фракциях в зависимости от начальных радиусов для $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па

ных радиусов a_{01}, a_{02} для амплитуды внешнего давления $\Delta P = 1.5 \cdot 10^5$ Па. Здесь число пузырьков в фракциях $N_1 = 3000$ и $N_2 = 7000$. Темная поверхность для первой фракции, светлая — для второй фракции. Тогда для некоторого диапазона значений $\bar{c}_\infty$ существуют не равновесные точки, а равновесные кривые $< \bar{c} >_\tau = \bar{c}_\infty$. На Рис. 10 изображены равновесные кривые для $\bar{c}_\infty = 0.12$. Стрелки показывают направление изменения соответствующего начального радиуса пузырька (рост или растворение). Толстые стрелки — для первой фракции, тонкие — для второй. Заметим, что равновесные кривые для различных фракций пересекаются только при $a_{01} = a_{02}$ (случай монодисперсного кластера). Таким образом, возможны три различных сценария: пузырьки в обеих фракциях будут растворяться или расти; пузырьки одной фракции будут растворяться или расти, а пузырьки другой фракции будут стремиться к своему равновесному радиусу; пузырьки обеих фракций будут стремиться к одному и тому же радиусу. Это означает, что со временем кластер станет либо монодисперсным, либо исчезнет, либо будет расти, пока пузырьки не разрушатся из-за неустойчивости поверхности.

4 Заключение

Показано, что в полидисперсном кластере (с пузырьками различных начальных радиусов) происходит синхронизация фаз коллапса. При некото-

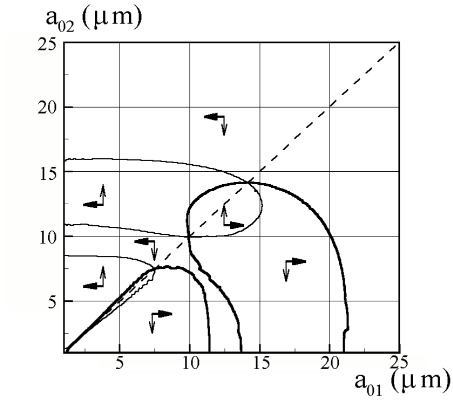

Рис. 10. Равновесные кривые для пузырьков в двухфракционном кластере при $\bar{c}_\infty = 0.12$

рых значениях параметров синхронизация может приводить к более глубокому коллапсу пузырьков одного размера. Исследование диффузионных процессов показало, что в монодисперсном кластере могут наблюдаться два устойчивых равновесных радиуса пузырьков, при которых размер пузырьков не меняется за период колебания. Кроме того, равновесие возможно при больших начальных концентрациях газа в жидкости, что подтверждает высокую вероятность появления облака пузырьков, а не одиночного пузырька при акустической кавитации. В случае двухфракционного кластера наблюдается тенденция к установлению одного размера пузырьков со временем, то есть кластер стремиться стать монодисперсным.

Список литературы

[1] Нигматулин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К., Насибуллаева Э. Ш. Динамика пузырьковых кластеров // Вестник БГУ. 1999. № 2. С. 12–15.

[2] Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Vakhitova N. K., Nasibullayeva E. Sh. Dynamics of bubble clusters // «Nonlinear Acoustics at the Turn of Millenium» AIP conference proceedings: Melville, New York, USA. 2000. V. 524. P. 455–460.

[3] Fyrillas M. M., Szeri A. J. Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles // J. Fluid Mech. 1994. V. 277. P. 381–407.

[4] Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., Parlitz U., Lauterborn W. The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // Ph. Rev. Lett. 1997. V. 78, N. 2. P. 227–230.