УДК 532.5

Численное моделирование эволюции границы раздела несжимаемых газа и жидкости в двумерной области[1]

А. С. Топольников

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Работа посвящена численному моделированию уравнений Навье–Стокса для несжимаемой среды в случае, когда внутри прямоугольной расчетной области имеются газ и жидкость, разделенные межфазной границей. Система уравнений для несжимаемой жидкости с учетом вязких, гравитационных и поверхностных (капиллярных) сил решается с помощью конечно–разностной схемы на разнесенной пространственной сетке, для описания поверхности раздела используется идеология Level Set Method. С помощью разработанного вычислительного кода численно исследован ряд гидродинамических задач, описывающих движение двухфазной несжимаемой среды с границей раздела. В результате численных расчетов получены результаты, которые обнаруживают удовлетворительное согласование с существующими аналитическими и экспериментальными решениями.

Ключевые слова: численное моделирование, конечно–разностная схема, несжимаемая жидкость, граница раздела, поверхностное натяжение, Level Set Method

1 Введение

Разработанный в конце 80-х — начале 90-х годов XX века Level Set Method [1, 2] — метод для отслеживания границ раздела, сегодня является едва ли не самым мощным вычислительным аппаратом и имеет множество приложений в теории горения, кристаллографии, гидро- и электродинамике,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02–01–97926) и Фонда содействия отечественной науке

компьютерной визуализации, а также других научных и близких к ним областях. Принципиальным его моментом является представление границы раздела Γ между двумя пространственными областями как поверхности нулевого уровня для функции ϕ, введенной на множестве $\Omega \times \mathcal{R}(t)$, где $\Omega \subset \mathcal{R}^2(x,t)$:

$$\phi\left(x(t), y(t), t\right) = 0. \tag{1}$$

В этом случае положение границы в любой фиксированный момент времени T может быть найдено неявно, как множество точек плоскости $\{(x,y) : \phi(x,y,T) = 0\}$, из решения уравнения (1) после дифференцирования по времени:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'(t) = 0. \tag{2}$$

Применительно к гидродинамике моделирование поверхности раздела с помощью введенной таким образом функции ϕ, которая в этом случае может рассматриваться как функция расстояния до границы, позволяет избежать многих вычислительных трудностей, типичных для традиционных методов (лагранжевы методы, VOF): большая деформация границы, изменение топологии задачи, вычисление нормали и кривизны в данной точке поверхности раздела.

На основе идеологии Level Set Method проводится численное моделирование задач, описывающих движение несжимаемой жидкости или газа в присутствие границы раздела. Система уравнений Навье–Стокса решается в двумерной постановке с учетом вязких, гравитационных и поверхностных (капиллярных) сил с помощью численной схемы первого порядка точности по времени и второго по пространству [3, 4]. Граница раздела, на которой терпят разрыв плотность и вязкость, моделируется сеточной функцией ϕ, определяемой из решения уравнения (2) с учетом известной скорости среды $\vec{U} = (x'(t), y'(t))$.

2 Уравнения движения вязкой тяжелой несжимаемой жидкости в плоском канале

Движение несжимаемой вязкой жидкости определяется решением уравнений неразрывности и Навье–Стокса, которые в общем случае (многомерная область и переменная вязкость) могут быть записаны в виде:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla \cdot \Big(\mu(\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T)\Big)}{\rho} + \vec{g}, \tag{4}$$

где $\vec{U}$ — вектор скорости; p — давление; ρ — плотность жидкости; $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения; символ T обозначает оператор транспонирования.

Для плоской области в декартовой системе координат с силой тяжести, направленной вдоль оси $0y$, уравнения (3), (4) перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) - g. \tag{7}$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости.

Будем считать, что внутри плоского канала имеются две несжимаемые среды с различными значениями плотности и вязкости, которые в дальнейшем для удобства условимся называть газом и жидкостью. Положение границы их раздела Γ, на которой непрерывны скорость и давление, в любой момент времени зададим нулевым уровнем сеточной функции $\phi(x, y, t)$:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega |\ \phi(x, y, t) = 0\}, \tag{8}$$

где $\Omega = \{x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2\}$.

Тогда в остальных точках области Ω нахождение там газа или жидкости будет определяться знаком функции $\phi(x, y, t)$:

$$\phi(x, y, t) \begin{cases} > 0, & (x, y) \in l \\ = 0, & (x, y) \in \Gamma \\ < 0, & (x, y) \in g. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь и далее символами l и g обозначены параметры жидкости и газа соответственно.

С учетом известного значения $\phi(x, y, t)$ плотность и вязкость в данной точке рассматриваемой области выражаются формулами:

$$\rho(\phi) = \rho_l H(\phi) + \rho_g(1 - H(\phi)), \quad \mu(\phi) = \mu_l H(\phi) + \mu_g(1 - H(\phi)), \tag{10}$$

где функция Хевисайда H равна:

$$H(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in l \\ 1/2, & (x,y) \in \Gamma \\ 0, & (x,y) \in g. \end{cases} \tag{11}$$

Наконец, эволюция самой границы раздела Γ будет определяться из решения уравнения Гамильтона–Якоби по известному значению скорости:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \phi = 0,$$

или в двумерном случае:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

3 Поверхностное натяжение

Для того, чтобы учесть поверхностное натяжение, действующее на границе между газом и жидкостью, модифицируем уравнение (4), записав его в виде [5, 6]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \nabla\right)\vec{U} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla \cdot (\mu(\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T))}{\rho} - \frac{\sigma\kappa\delta\nabla\phi}{\rho} + \vec{g}. \tag{13}$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения; $\kappa = \nabla \cdot \vec{n}$ — кривизна поверхности с нормалью $\vec{n}$, направленной в сторону жидкости; $\delta = \delta(\phi)$ — функция Дирака, которая вводится для того, чтобы обеспечить локальное (при $\phi = 0$) действие силы поверхностного натяжения:

$$\left(\mu_l(\nabla \vec{u_l} + \nabla \vec{u_l}^T) - \mu_g(\nabla \vec{u_g} + \nabla \vec{u_g}^T)\right)\vec{n} = (p_l - p_g + \sigma\kappa)\,\vec{n}, \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Для двумерной пространственной области уравнение (13) с учетом равенства $\delta\nabla\phi = \nabla H$ перепишется в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \\ = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - \frac{\sigma\kappa}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x}, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\\ =\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)-\frac{\sigma\kappa}{\rho}\frac{\partial H}{\partial y}-g,\end{gathered} \tag{15}$$

где κ определяется формулой

$$\kappa=\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)=\frac{\phi_{xx}\phi_y^2-2\phi_{xy}\phi_x\phi_y+\phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2+\phi_y^2)^{3/2}},$$

а H задается равенством (11).

4 Конечно–разностная схема

При численной реализации дифференциальных уравнений (5), (10), (12), (14), (15) используется их безразмерная форма:

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde x}+\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde y}=0, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde t}+\tilde u\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde x}+\tilde v\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde y}+\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde x}=\\ =\frac{1}{Re}\frac{1}{\tilde\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde x}\left(2\tilde\mu\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde x}\right)+\frac{\partial}{\partial\tilde y}\left(\tilde\mu\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde y}+\tilde\mu\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde x}\right)\right)-\frac{1}{We}\frac{\tilde\kappa}{\tilde\rho}\frac{\partial H}{\partial\tilde x},\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde t}+\tilde u\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde x}+\tilde v\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde y}+\frac{1}{\tilde\rho}\frac{\partial\tilde p}{\partial\tilde y}=\\ =\frac{1}{Re}\frac{1}{\tilde\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde x}\left(\tilde\mu\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde y}+\tilde\mu\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde x}\right)+\frac{\partial}{\partial\tilde y}\left(2\tilde\mu\frac{\partial\tilde v}{\partial\tilde y}\right)\right)-\frac{1}{We}\frac{\tilde\kappa}{\tilde\rho}\frac{\partial H}{\partial\tilde y}-Fr,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\tilde\rho(\phi)=H(\phi)+\frac{\rho_g}{\rho_l}(1-H(\phi)),\quad \tilde\mu(\phi)=H(\phi)+\frac{\mu_g}{\mu_l}(1-H(\phi)), \tag{19}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde t}+\tilde u\frac{\partial\phi}{\partial\tilde x}+\tilde v\frac{\partial\phi}{\partial\tilde y}=0, \tag{20}$$

$$\frac{x_1}{X_0}\le\tilde x\le 1,\frac{y_1}{X_0}\le\tilde y\le\frac{y_2}{X_0},0\le\tilde t\le\frac{T}{T_0}.$$

Здесь используются следующие безразмерные параметры: $X_0=x_2$, $P_0=p_{l0}$, $R_0=\rho_l$, $U_0=\sqrt{P_0/R_0}$, $T_0=X_0/U_0$, $Re=U_0X_0R_0/\mu_l$, $Fr=gX_0/U_0^2$, $We=R_0X_0U_0^2/\sigma$.

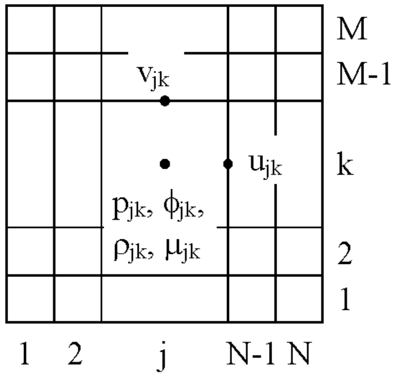

Рис. 1. Расчетная сетка для вычислительного алгоритма

Вся пространственная область разбивается на $N \times M$ прямоугольников с равномерным шагом по оси Ox и Oy. При этом сеточные значения расчетных параметров выбираются так, как показано на Рис. 1: давление, плотность, вязкость и функция ϕ будут задаваться в серединах ячеек, а горизонтальная и вертикальная компоненты скорости u и v — на серединах сторон расчетных прямоугольников (разнесенная сетка). Вычислительный алгоритм, который используется для аппроксимации уравнений (16)–(20), состоит из четырех последовательных шагов [3, 4, 7]. Для обеспечения его устойчивости применяется ограничение на временной шаг, которое складывается из условий Куранта–Фридрикса–Леви для конвекции, а также условий, связанных с влиянием вязкости, гравитационных и поверхностных сил.

5 Результаты численных расчетов

5.1 Колебания идеальной жидкости в плоском сосуде

Рассмотрим колебания идеальной ($\mu = 0$) тяжелой ($g \neq 0$) несжимаемой жидкости в двумерной области, вызванные начальным возмущением ее поверхности [8]. Примем, что при $t = 0$ квадратная область $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ наполовину заполнена жидкостью, поверхность которой возмущена по закону

$$\Gamma = \{(x, y)|\ 0 \leq x \leq 1,\ y = 0.5 + 0.05\cos(\pi x)\}.$$

Остальное пространство занимает газ, который также считается несжимаемым, с плотностью много меньшей плотности жидкости $\tilde{\rho}_g = 0.001 \ll \tilde{\rho}_l = 1.0$ (в данной задаче используются безразмерные параметры).

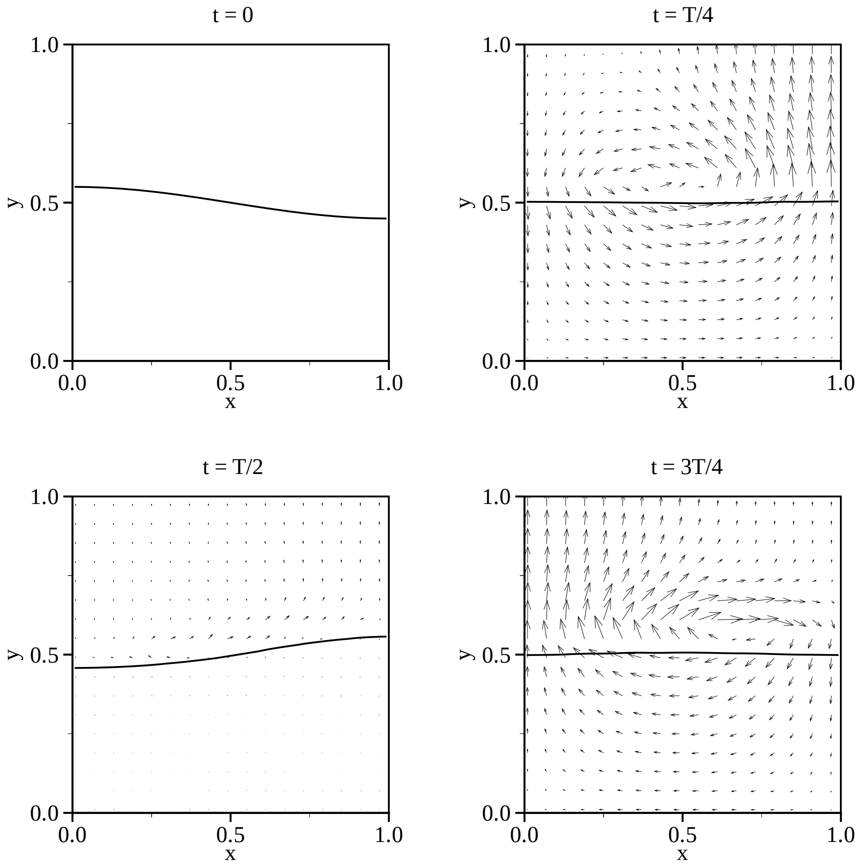

Рис. 2. Положение границы и поле скорости в различные моменты времени в задаче о колебаниях идеальной жидкости в плоском сосуде

Под действием вектора силы тяжести жидкость начинает колебаться, при этом период колебаний первой моды определяется известной формулой теории длинных волн, который в нашем случае равен:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kh)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi Fr\,\mathrm{th}\,(\pi/2)}} \approx 3.7016\frac{1}{\sqrt{Fr}},$$

где Fr — безразмерное число Фруда. В отсутствие вязкости на всех границах, кроме верхней, ставятся условия непротекания. Верхняя граница считается свободной с фиксированным значением давления $p = 1.0$. Положение поверхности раздела между жидкостью и газом в ходе расчета определяется нулевым уровнем сеточной функции ϕ.

На Рис. 2 показаны графики численного решения задачи в различные моменты времени в течение первого периода колебаний границы раздела. Возмущение поверхности в каждый момент времени создает характерное круговое движение в жидкости и газе. Численное решение, соответствующее Рис. 2, получено для $Fr = 1.0$ на равномерной сетке размера 100×100. Для различных расчетных сеток проведено сравнение численного и аналитического решения по значениям амплитуды и частоты колебаний. Получено удовлетворительное согласование.

5.2 Падение водяного столба

Рассмотрим прямоугольный сосуд, разделенный вертикальной перегородкой на две области, одну из которых заполняет тяжелая ($g \neq 0$) жидкость. После того, как перегородку убирают, под действием силы тяжести вода устремляется в свободную область. В результате этого начальный столб жидкости рассыпается и возникает картина с набегающей и отражающейся от стенок сосуда волной, которая с течением времени затухает под действием вязких сил. Указанная задача ранее изучалась экспериментально [9], аналитически [10] и численно [11].

Решение задачи будем искать в размерных переменных. В качестве пространственной области рассмотрим квадрат со стороной $a = 0.584$ м. Примем, что в начальный момент времени столб жидкости имел высоту $a/2 = 0.292$ м, ширину $a/4 = 0.146$ м и располагался около левой границы. Физические параметры задачи определим следующим образом: плотность жидкости $\rho_l = 1000$ кг/м^3, плотность газа $\rho_g = 1$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с. Поскольку нас будет интересовать только начальная стадия развития волнового движения, то вязкостью можно пренебречь так же, как и поверхностным натяжением, эффект которого будет ничтожно мал благодаря достаточно большому масштабу задачи. На всех границах, кроме верхней, ставятся условия непротекания. Верхняя граница считается свободной с фиксированным значением давления $p = 10^5$ Па.

На Рис. 3 представлена картина решения задачи в интервале времени $\Delta t = 0.1$ с вплоть до момента, когда начинается отражение волны от правой границы. Решение построено на равномерной сетке 80×80. Проведено сравнение численных и экспериментальных результатов по изменению положения границы раздела у левой стенки сосуда и скорости распространения переднего фронта волны. Получено удовлетворительное согласование (см. Рис. 4).

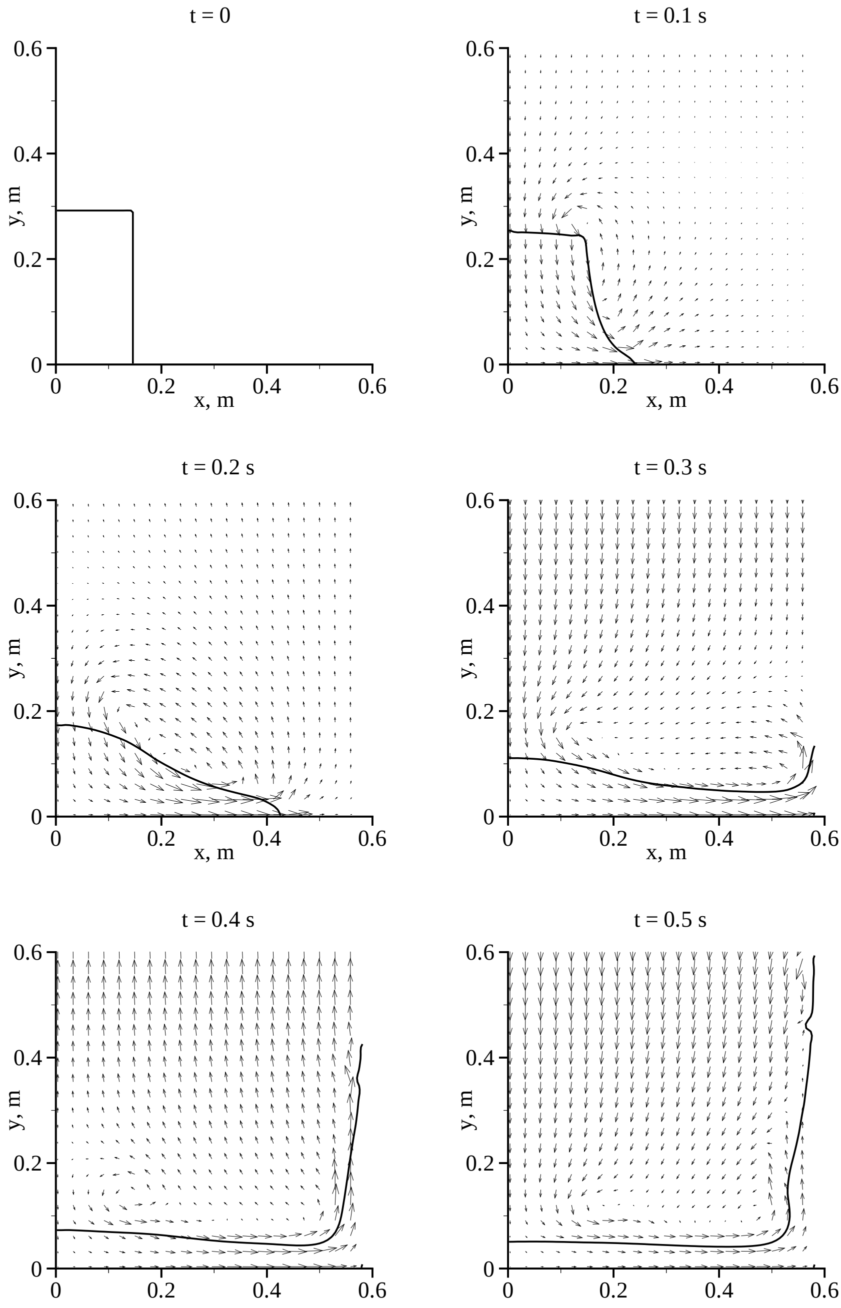

Рис. 3. Эволюция границы раздела и поле скорости в задаче о падении водяного столба

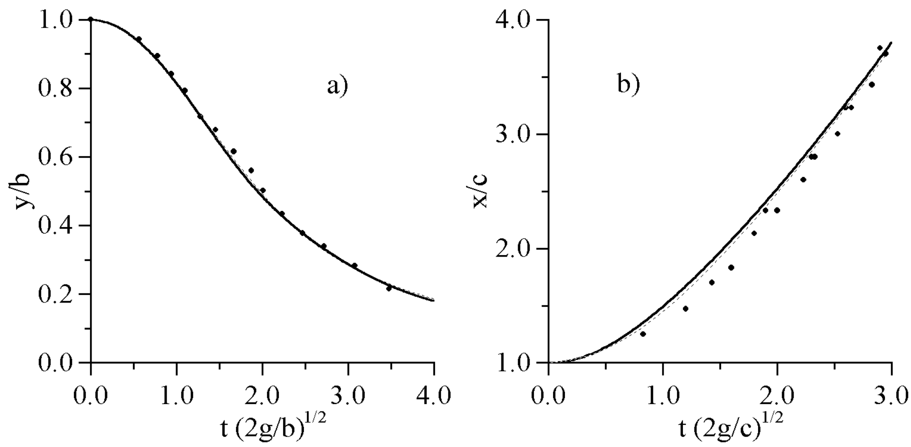

Рис. 4. Сравнение с экспериментальными данными: a) изменение положения границы раздела у левой стенки сосуда, b) распространение переднего фронта волны вдоль нижней границы. Здесь $b = a/2$ и $c = a/4$ — начальные высота и ширина водяного столба; y и x — текущие значения уровня воды около левой стенки и ее переднего фронта; g — ускорение свободного падения; t — текущее время. Точки — экспериментальные данные (Martin, Moyce, 1952), пунктирная линия — сетка 40×40, сплошная линия — сетка 80×80

5.3 Всплывающий пузырек

Результирующее действие эффектов вязкости, поверхностного натяжения и гравитации рассмотрим на примере задачи о всплытии газового пузырька в безграничном объеме несжимаемой жидкости [6, 12].

Предположим, что в начальный момент времени прямоугольная расчетная область $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10$ см, $0 \leq y \leq 15$ см $\}$ заполнена жидкостью с плотностью $\rho_l = 1000$ кг/м^3 и вязкостью $\mu_l = 10^{-3}$ Па·с, внутри которой находится сферический пузырек радиуса $a_0 = 1$ см с центром в точке O (5 см, 5 см). Плотность газа в пузырьке принимается равной $\rho_g = 1.2$ кг/м^3, вязкость — $\mu_g = 10^{-5}$ Па·с, коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела между газом и жидкостью — $\sigma = 0.07$ Н/м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. На всех четырех границах задаются условия прилипания. Отметим здесь, что малый по сравнению с расчетной областью размер пузырька обеспечивает минимальное влияние граничных условий, но снижает эффективность вычисления динамики самого пузырька из-за необходимости брать большое количество сеточных узлов.

Под действием выталкивающей силы Архимеда пузырек начинает вертикальное всплытие, в течение которого из-за вязких и поверхностных эф-

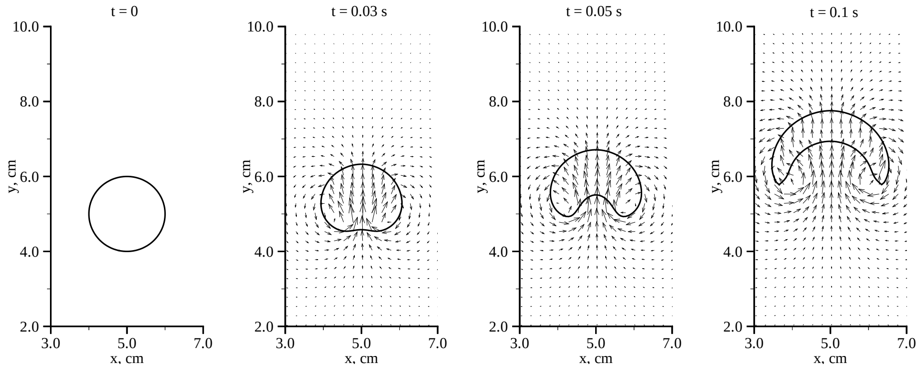

Рис. 5. Эволюция формы пузырька при всплытии в объеме несжимаемой жидкости

фектов меняет свою форму. На Рис. 5 представлены графики положения пузырька и поле скорости для четырех последовательных моментов времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 0.03$ с, $t_3 = 0.05$ с и $t_4 = 0.1$ с, полученные на равномерной сетке размера 160×240 ячеек.

Для проверки сходимости численного алгоритма решение задачи сравнивалось для четырех расчетных сеток: 20×30, 40×60, 80×120 и 160×240. Оценивались погрешность в вычислении объема пузырька к моменту времени $t_4 = 0.1$ с и значения скорости всплытия, которая в данной задаче является постоянной величиной.

5.4 Падающая капля

Рассмотрим применение идеологии Level Set Method в случае изменения топологии на примере задачи о падении капли на поверхность жидкости. Предположим, что в начальный момент времени прямоугольная расчетная область $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 10$ см, $0 \le y \le 15$ см $\}$ при $y < 5$ см заполнена жидкостью ($\rho_l = 1000$ кг/м^3, $\mu_l = 10^{-3}$ Па·с), а при $y > 5$ см — газом ($\rho_g = 1.2$ кг/м^3, $\mu_g = 10^{-5}$ Па·с). Сферическая капля жидкости с центром при $t = 0$ в точке с координатами (5 см, 10 см) и радиусом 1 см начинает падать под действием силы тяжести ($g = 10$ м/с^2). Так же, как и в предыдущей задаче, будем учитывать одновременное действие вязкости, гравитации и поверхностного натяжения ($\sigma = 0.07$ Н/м). На всех границах, кроме верхней, ставятся условия прилипания для скорости. Верхняя граница считается свободной с фиксированным значением давления $p = 10^5$ Па.

Решение задачи разбивается на две стадии: движение капли в газе до ее соприкосновения с жидкостью и волновые процессы на поверхности жид-

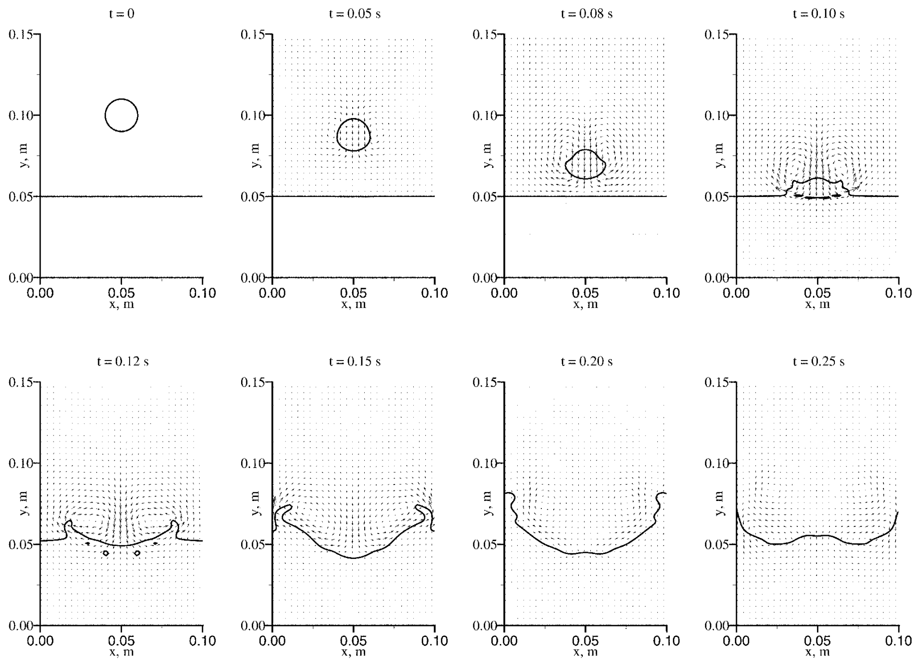

Рис. 6. Падение капли на поверхность жидкости

кости, вызванные падением капли. На Рис. 6 представлены графики положения пузырька и поле скорости для восьми последовательных моментов времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 0.05$ с, $t_3 = 0.08$ с, $t_4 = 0.10$ с, $t_5 = 0.12$ с, $t_6 = 0.15$ с, $t_7 = 0.20$ с и $t_8 = 0.25$ с, полученные на равномерной сетке размера 80×120 ячеек. Как следует из графиков, после своего падения капля инициирует расходящуюся волну в жидкости, которая достигает стенки расчетной области (этот момент примерно соответствует времени $t_6 = 0.15$ с) и отражается в обратную сторону. В последующие моменты времени наблюдается взаимодействие поверхностных волн, интенсивность которых за счет вязких и капиллярных сил довольно скоро становится незначительной.

6 Заключение

С помощью разработанного вычислительного кода были численно исследованы: задача о колебаниях идеальной жидкости в плоском сосуде под действием силы тяжести; задача о падающем столбе тяжелой жидкости; задача о всплытии пузырька, заполненного несжимаемым газом, в объеме вязкой жидкости и задача о падающей на плоскую поверхность жидкости капле. В результате численных расчетов получены решения, которые обнаруживают удовлетворительное согласование с существующими аналитическими и экспериментальными решениями.

Список литературы

[1] Osher S., Sethian J. A. Front propagating with curvature–dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacoby formulations // J. Comp. Physics. 1988. V. 28. P. 12–49.

[2] Sethian S. J. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and material science. UKM: Cambridge Univ. Press, 1999.

[3] Harlow F., Welch J. Numerical calculation of time–dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 2182–2189.

[4] Griebel M., Dornseifer T., Neunhoeffer T. Numerical simulation in fluid dynamics. Philadelphia, USA: SIAM, 1998.

[5] Sussman M., Fatemi E., Smereka P., Osher S. An improved Level Set Method for incompressible two-phase flows // Computers and Fluids. 1998. V. 27, №. 5–6. P. 663–680.

[6] Sussman M., Almgren A. S. An adaptive Level Set approach for incompressible two-phase flows // J. Comp. Physics. 1999. V. 148. P. 81–124.

[7] Флетчер K. Вычислительные методы в динамике жидкостей. M.: Мир, 1991.

[8] Raad P. E., Chen S., Johnson D. B. The introduction of micro cells to treat pressure in free surface fluid flow problems // J. Fluid Eng. 1995. V. 117. P. 683–690.

[9] Martin J. C., Moyce W. J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1952. V. 244. P. 312–324.

[10] Stoker J. J. Water waves. N.Y.: John Wiley & Sons, 1958.

[11] Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of Fluid (VOF) Method for dynamics of free boundaries // J. Comp. Physics. 1981. V. 39, P. 201–225.

[12] Kang M., Fedkiw R. P., Liu X.-D. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow // J. Sci. Comp. 2000. V. 15, No. 3, P. 323–360.