

УДК 532.546; 533.15

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

*А. А. Аганин, А. И. Давлетшин, В. Г. Малахов*

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань  
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань

**Аннотация.** Предлагается математическая модель взаимодействия двух сферических газовых пузырьков в жидкости. Данная модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков и пространственного положения их центров. Она отличается от известных в литературе аналогов тем, что допускает значительно меньшие расстояния между взаимодействующими пузырьками.

**Ключевые слова:** уравнения динамики жидкости, взаимодействие пузырьков, потенциальное движение

---

## 1 Введение

К настоящему времени довольно хорошо изучена динамика отдельного газового пузырька в жидкости [1]. Полученные в этом отношении результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение. Однако в реальных жидкостях, как правило, присутствует не один, а множество пузырьков, и свойства жидкостей существенно зависят от характера взаимодействия между пузырьками. В силу большей сложности этот вопрос является менее изученным [2].

В настоящей работе рассматривается взаимодействие двух пузырьков. Важной характеристикой процесса взаимодействия пузырьков является

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00145) и в рамках программы ОЭМПИУ РАН

отношение  $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$ , где  $R_i, R_j$  — радиусы  $i$ -го и  $j$ -го пузырьков, соответственно;  $d$  — расстояние между центрами пузырьков. Используемые в литературе модели имеют, как правило, третий или четвертый порядок точности относительно  $\xi$  [2–4]. При решении ряда задач, особенно с близким расположением пузырьков друг к другу, этого может оказаться недостаточно. В настоящей работе предлагается математическая модель, в которой порядок точности относительно указанного параметра  $\xi$  может быть произвольным. Это означает, что предлагаемая модель позволяет изучать взаимодействие пузырьков, расположенных значительно ближе, чем это можно делать с помощью моделей, предложенных в [2–4].

## 2 Постановка задачи

Движение жидкости считается потенциальным, пузырьки — сферическими. Уравнения динамики жидкости в терминах потенциала скорости  $\Phi$  имеют вид:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $t$  — время;  $p$  — давление;  $\rho_0$  — плотность;  $p_\infty$  — давление на бесконечном удалении от пузырьков, изменяющееся по закону:

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t,$$

где  $p_0$  — статическое давление;  $\Delta p$  — амплитуда;  $\omega$  — частота колебаний.

Уравнение поверхности пузырьков имеет вид:

$$F_k(x, y, z, t) = 0,$$

где  $k = i, j$ ,  $(x, y, z)$  — декартовы координаты. Центры пузырьков расположены на оси  $z$  так, что  $z_i - z_j = d$ . На поверхности каждого из пузырьков ставятся кинематические и динамические (по нормали) граничные условия. В терминах потенциала скорости они имеют вид:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0, \quad (3)$$

$$p_k^+ = p_k^- + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2\sigma}{R_k}, \quad (4)$$

где знаки  $\pm$  указывают на отношение к внешней (+) и внутренней (–) сторонам поверхности;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости,  $\mathbf{n}_k$  — вектор внешней нормали;  $2H_k$  — средняя кривизна поверхности пузырька;

$\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. В силу предположения о потенциальности движения жидкости динамическое граничное условие по касательной в постановке задачи не используется. Такой подход является одним из используемых в литературе способов учета влияния вязкости [5].

Газ в пузырьках принимается с однородным распределением давления, изменяющимся по закону

$$p_k^- = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0k}} \right) \left( \frac{R_{0k}}{R_k} \right)^{3\kappa}, \quad (5)$$

где  $R_{0k}$ ,  $R_k$  — начальный и текущий радиусы пузырьков;  $\kappa$  — показатель адиабаты.

### 3 Математическая модель

При построении математической модели наряду с глобальной неподвижной системой отсчета  $(x, y, z)$  используются две локальные подвижные. В качестве подвижных применяются сферические координаты  $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$  с началом отсчета в центре соответствующего пузырька. Имеет место следующая связь

$$x = x(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau), \quad y = y(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau), \quad z = z(r_k, \theta_k, \varphi_k, \tau),$$

где  $\tau$  — время в подвижной системе координат.

В подвижных координатах уравнение движения в (2) и кинематическое граничное условие (3) принимают вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p^+ - p_\infty}{\rho_0} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial \tau} - \mathbf{w}_k \cdot \nabla F_k + \nabla \Phi \cdot \nabla F_k = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{w}_k = w_k \cdot \mathbf{k}$ ;  $w_k = \dot{z}_k$  — скорость движения подвижной системы координат;  $\mathbf{k}$  — единичный вектор оси  $z$ ;  $z_k$  — координата центра  $k$ -го пузырька. Здесь и далее верхней точкой обозначается производная по  $\tau$ .

Потенциал скорости жидкости принимается в следующем виде:

$$\Phi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma i}(\tau) P_{\gamma i}(\cos \theta_i)}{r_i^{\gamma+1}} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma j}(\tau) P_{\gamma j}(\cos \theta_j)}{r_j^{\gamma+1}}, \quad (8)$$

где  $P_\gamma(\eta)$  — полином Лежандра степени  $\gamma$ ,  $\eta = \cos \theta_k$ .

Уравнение поверхности каждого пузырька в его локальной сферической системе координат  $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$  можно записать в виде:

$$F_k(r_k, \tau) = r_k - R_k(\tau) = 0. \quad (9)$$

Подставляя выражения для потенциала  $\Phi$  из (8) и поверхности  $F_k(r_k, \tau)$  из (9) в кинематическое условие (7) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, получаем следующие выражения для коэффициентов потенциала скорости

$$\begin{aligned} B_{0i} &= -\dot{R}_i R_i^2, & B_{0j} &= -\dot{R}_j R_j^2, \\ B_{1i} &= -\frac{R_i^3 z_i}{2} + \frac{B_{\gamma j} R_i^3}{2d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1}, & B_{1j} &= -\frac{R_j^3 z_j}{2} + (-1)^{\gamma+1} \frac{B_{\gamma i} R_j^3}{2d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1}, \\ B_{ni} &= \frac{n}{(n+1)} \frac{B_{\gamma j} R_i^{2n+1}}{d^{\gamma+n+1}} C_{\gamma n}, & B_{nj} &= (-1)^{\gamma+n} \frac{n}{(n+1)} \frac{B_{\gamma i} R_j^{2n+1}}{d^{\gamma+n+1}} C_{\gamma n}, \\ & & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам предполагается суммирование от 0 до  $\infty$ .

Система уравнений для радиусов пузырьков и положений их центров получается из динамического условия (4). Для этого нужно выразить давление  $p_k^+$  из (6), подставить его в (4). Затем в полученном выражении следует заменить  $\Phi$  согласно (8) и  $F_k(r_k, \tau)$  согласно (9), после чего с учетом ортогональности полиномов Лежандра будем иметь систему следующих обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} R_i \ddot{R}_i + 2\dot{R}_i^2 + \frac{B_{\gamma i}^2}{2R_i^{2\gamma+4}} C_{\gamma 1} - \frac{\dot{B}_{\gamma j}}{d^{\gamma+1}} + \frac{B_{\gamma j} \dot{z}_j}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \\ - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j} R_i^{2\zeta-2}}{2d^{\gamma+\sigma+2\zeta+2}} \varsigma C_{\gamma \zeta} C_{\sigma \zeta} = \frac{p_i^- - p_\infty}{\rho_0} + \frac{4\nu B_{0i}}{R_i^3} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_i \ddot{z}_i + 5\dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{B_{\gamma i} B_{\sigma i}}{R_i^{\gamma+\sigma+4}} [(\gamma+1)(\sigma+1) \alpha_{\gamma\sigma 1} + \beta_{\gamma\sigma 1}] - \\ - \frac{3\dot{B}_{\gamma j} R_i + 3B_{\gamma j} \dot{R}_i}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \frac{2B_{\gamma j} R_i (\dot{z}_i - 3\dot{z}_j)}{d^{\gamma+3}} C_{\gamma 2} + \\ + \frac{2B_{\gamma i} B_{\sigma j}}{R_i^{\gamma-\zeta+3} d^{\sigma+\zeta+1}} C_{\sigma \zeta} [\zeta(\gamma+1) \alpha_{\gamma\zeta 1} - \beta_{\gamma\zeta 1}] - \\ - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j} R_i^{\zeta+\vartheta-2}}{d^{\gamma+\sigma+\zeta+\vartheta+2}} C_{\gamma \zeta} C_{\sigma \vartheta} (\zeta\vartheta \alpha_{\zeta\vartheta 1} + \beta_{\zeta\vartheta 1}) = \frac{24\nu B_{1i}}{R_i^4}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} R_j \ddot{R}_j + 2\dot{R}_j^2 + \frac{B_{\gamma j}^2}{2R_j^{2\gamma+4}} C_{\gamma 1} - (-1)^\gamma \frac{\dot{B}_{\gamma i}}{d^{\gamma+1}} - (-1)^\gamma \frac{B_{\gamma i} \dot{z}_i}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} - \\ - (-1)^{\gamma+\sigma} \frac{B_{\sigma i} B_{\gamma i} R_j^{2\zeta-2}}{2d^{\gamma+\sigma+2\zeta+2}} \varsigma C_{\gamma \zeta} C_{\sigma \zeta} = \frac{p_j^- - p_\infty}{\rho_0} + \frac{4\nu B_{0j}}{R_j^3} - \frac{2\sigma}{\rho_0 R_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& R_j \ddot{z}_j + 5\dot{R}_j \dot{z}_j - \frac{B_{\gamma j} B_{\sigma j}}{R_j^{\gamma+\sigma+4}} [(\gamma+1)(\sigma+1)\alpha_{\gamma\sigma 1} + \beta_{\gamma\sigma 1}] + \\
& + (-1)^\gamma \frac{3\dot{B}_{\gamma i} R_j + 3B_{\gamma i} \dot{R}_j}{d^{\gamma+2}} C_{\gamma 1} + (-1)^\gamma \frac{2B_{\gamma i} R_j (3\dot{z}_i - \dot{z}_j)}{d^{\gamma+3}} C_{\gamma 2} + \\
& + (-1)^{\sigma+\varsigma} \frac{2B_{\gamma j} B_{\sigma i}}{R_j^{\gamma-\varsigma+3} d^{\sigma+\varsigma+1}} C_{\sigma\varsigma} [\varsigma(\gamma+1)\alpha_{\gamma\varsigma 1} - \beta_{\gamma\varsigma 1}] - \\
& - (-1)^{\gamma+\sigma+\varsigma+\vartheta} \frac{B_{\gamma i} B_{\sigma i} R_j^{\varsigma+\vartheta-2}}{d^{\gamma+\sigma+\varsigma+\vartheta+2}} C_{\gamma\varsigma} C_{\sigma\vartheta} (\varsigma\vartheta\alpha_{\varsigma\vartheta 1} + \beta_{\varsigma\vartheta 1}) = \frac{24\nu B_{1j}}{R_j^4},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma\sigma\varsigma} &= \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 P_\gamma(\eta) P_\sigma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta, \\
\beta_{\gamma\sigma\varsigma} &= \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P'_\gamma(\eta) P'_\sigma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta.
\end{aligned}$$

Система (10)–(13) решается методом Дормана-Принса восьмого порядка точности, при следующих начальных условиях

$$R_k(0) = R_{k0}, \quad \dot{R}_k(0) = v_{k0}, \quad z_k(0) = z_{k0}, \quad \dot{z}_k(0) = w_{k0}.$$

## 4 Иллюстрация применения

Для верификации программной реализации предлагаемой модели было проведено сравнение с результатами работы [3]. На Рис. 1 приведено из-

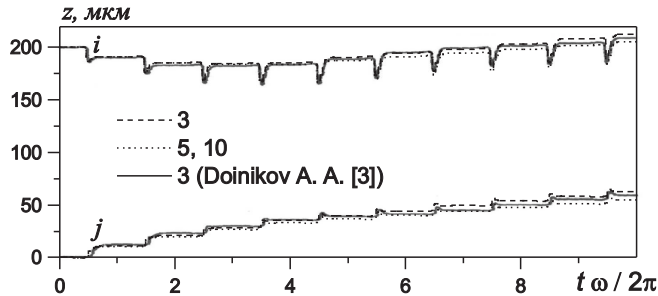


Рис. 1. Временные зависимости  $z$ -координаты центров пузырьков. Цифрами указан порядок точности используемой модели относительно

$$\xi = (R_i + R_j)/d < 1$$

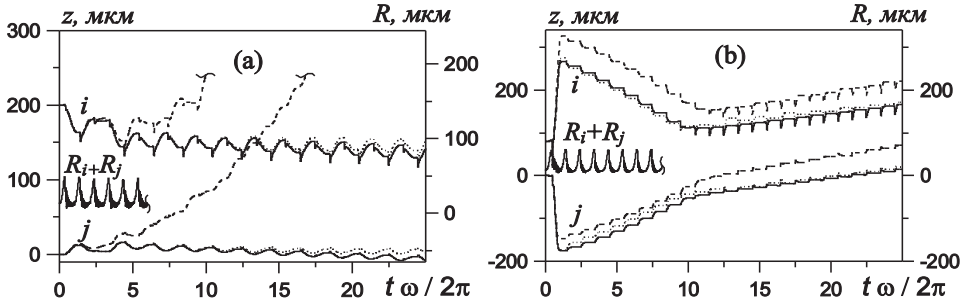


Рис. 2. Временные зависимости  $z$ -координаты центров и суммы радиусов пузырьков без учета (а) и с учетом (б) вязкости жидкости. Штриховые линии — третий порядок точности, пунктирные — пятый, сплошные — десятый и пятнадцатый

менение  $z$ -координаты центров пузырьков, рассчитанное при помощи модели настоящей работы, и взятое из Рис. 3(а) работы [3]. Решения получены при следующих входных данных:  $p_0 = 1$  бар,  $\rho_0 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega/2\pi = 20$  кГц,  $\kappa = 1.4$ ,  $\sigma = 0.0725$  Н/м,  $\mu = 10^{-3}$  кг/(м с),  $\Delta p = 1.2$  бар,  $R_{i0} = 5$  мкм,  $R_{j0} = 7$  мкм,  $z_{i0} = 200$  мкм,  $z_{j0} = 0$  ( $d_0 = 200$  мкм),  $v_{i0} = v_{j0} = w_{i0} = w_{j0} = 0$ . Как видно, результаты, полученные с помощью модели настоящей работы 3-го порядка точности и модели работы [3] также 3-го порядка, с течением времени начинают расходиться. Со временем это расхождение, будучи сначала незначительным, постепенно возрастает. Такое расхождение объясняется тем, что математическая модель 3-го порядка точности настоящей работы не является полностью идентичной математической модели работы [3]. Она совпадает с ней лишь по порядку точности. Это означает, что результаты применения этих двух моделей будут близкими лишь тогда, когда слагаемые более высокого порядка малости, отброшенные в разложениях при получении этих моделей, будут несущественными. В данной же задаче их влияние с течением времени оказывается не очень малым, о чем свидетельствует расхождение решений, полученных с применением моделей настоящей работы 3-го и 5-го порядков точности. На начальном же отрезке времени, где влияние указанных слагаемых мало, решения с применением всех представленных на рисунке моделей совпадают. Поэтому можно заключить, что программная реализация предлагаемой модели выполнена правильно.

Необходимость использования моделей выше 5-го порядка точности относительно  $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$  иллюстрируется на Рис. 2. Входные данные задач, представленных на этом рисунке, следующие: Рис. 2(а) —  $\mu = 0$ ,  $\Delta p = 1.153$  бар; Рис. 2(б) —  $z_{i0} = 80$  мкм ( $d_0 = 80$  мкм). Значения других параметров те же, что и в задаче, приведенной на Рис. 1. Из Рис. 2 видно,

что для достижения сходимости численного решения пятого порядка точности оказывается недостаточно как в первом случае без учета вязкости жидкости, так и во втором случае с ее учетом.

## 5 Заключение

Построена математическая модель взаимодействия двух сферических газовых пузырьков в жидкости. От известных в литературе аналогов она отличается тем, что позволяет рассчитывать динамику пузырьков, более близко расположенных друг к другу. Это достигается за счет того, что теоретически она имеет неограниченный порядок точности относительно малого параметра  $\xi = (R_i + R_j)/d < 1$ , где  $R_i, R_j$  — радиусы пузырьков,  $d$  — расстояние между их центрами, в то время как порядок точности известных в литературе аналогов, как правило, не превышает четвертый. Приведены примеры численных расчетов. Показано, что при достаточно близком расположении пузырьков для получения результатов, соответствующих исходной постановке задачи в рамках уравнений динамики жидкости, надо применять модели с более высоким порядком точности, чем это делается в [2–4].

## Список литературы

- [1] Аганин А. А., Ильгамов М. А. Динамика пузырька газа в жидкости с немалыми искажениями сферической формы // В сб. Динамика газовых пузырьков и аэрозолей. Казань: Казанский государственный университет. 2003. С. 7–22.
- [2] Коновалова С. И. Трансляционные эффекты и структурообразование при акустической кавитации // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа, 2006.
- [3] Doinikov A. A. Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Phys. Rev. E*. 2001. V.64.
- [4] Harkin A., Kaper T. J., Nadim A. Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid // *Fluid Mech.* 2001. V.445. Pp. 377–411.
- [5] Gavriluk S. L., Teshukov V. M. Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds numbers // *Eur.J.Mech.B.Fluids*. 2005. V. 24, № 4. P. 468–477.