



УДК 534.2:532

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ¹

А. А. Аганин, Т. Ф. Халитова, Н. А. Хисматуллина

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Аннотация. Предлагается методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа. Эта методика использует схему второго порядка точности по пространству и времени в области гладких решений. Приводятся результаты численного исследования экономичности данной методики. Установлено, что она намного эффективнее широко известной в литературе классической схемы Годунова первого порядка аппроксимации.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ENO, TVD, схема Годунова

1 Введение

При изучении эволюции возмущений сферической формы пузырька широко используются приближенные модели, в которых динамика жидкости и газа представляется как суперпозиция чисто радиального движения и его малого несферического возмущения [1]. Такой подход значительно упрощает математические выкладки и он эффективен в смысле затрат компьютерного времени. Однако точность и область применимости таких моделей ограничены предположениями о характере движения и распределении параметров задачи.

В настоящей работе предлагается методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00415-а) и в рамках программы ОЭМПУ РАН

Такой подход является более общим, однако требует значительных временных затрат. В связи с этим в данной работе представлены результаты численного исследования экономичности методики на примере тестовой задачи свободных колебаний полости в жидкости. Для иллюстрации правильности описания сферического и несферического движения поверхности, а также их взаимодействия приводятся результаты расчета задачи динамики газовой полости в слое жидкости.

2 Математическая модель

В настоящей работе применяются уравнения динамики газа и сжимаемой жидкости без учета вязкости, теплопроводности и испарения–конденсации в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = 0,$$

с уравнениями состояния вида $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Здесь ρ — плотность; \mathbf{u} — вектор скорости частицы среды; p — давление; E — удельная полная энергия; ε — удельная внутренняя энергия; T — температура.

Граничные условия на поверхности пузырька $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ имеют вид:

$$\mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n}^0 = \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{n}^0 = \mathbf{D}, \quad p^+ = p^- + 2H\sigma,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки пространства; $\mathbf{D} = \partial \mathbf{r}_s / \partial t = D\mathbf{n}^0$ — скорость элемента поверхности пузырька; \mathbf{n}^0 — внешняя единичная нормаль; σ — коэффициент поверхностного натяжения; $2H$ — средняя кривизна поверхности, знак плюс в качестве верхнего индекса указывает, что значение параметра относится к стороне жидкости, а знак минус — к стороне газа.

В зависимости от моделируемой задачи на внешней границе $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty$ задается эволюция внешнего давления или эволюция нормальной компоненты скорости.

Поверхность пузырька в процессе сжатия может претерпевать значительные искажения, поэтому в предлагаемой методике используется смешанная эйлерово-лагранжева (СЭЛ) система координат (ξ, η) , связанная с поверхностью пузырька. Связь между эйлеровыми и СЭЛ координатами имеет вид: $x = x(\xi, \eta, \tau)$, $y = y(\xi, \eta, \tau)$, $t = \tau$.

Уравнения газовой динамики в дивергентной форме в СЭЛ координатах:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{G}_\eta = \mathbf{S},$$

где

$$\mathbf{Q} = \sqrt{|h|}\mathbf{q}, \quad \mathbf{F} = \sqrt{|h|}\mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = \sqrt{|h|}\mathbf{g}, \quad \mathbf{S} = \sqrt{|h|}\mathbf{s};$$

$$\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(U - U_w) \\ \rho u(U - U_w) + p\xi_x \\ \rho v(U - U_w) + px^{-\beta}\xi_y \\ \rho E(U - U_w) + pU \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho(V - V_w) \\ \rho u(V - V_w) + p\eta_x \\ \rho v(V - V_w) + px^{-\beta}\eta_y \\ \rho E(V - V_w) + pV \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha p}{x} + \beta \left[\rho v \left(\frac{v}{x} - y_\tau \right) \right] \\ \beta \left[-\frac{\rho}{x} (uv - uxy_\tau - vx_\tau) + \frac{p}{x} \operatorname{ctg} y \right] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $U = u\xi_x + \frac{v}{x^\beta}\xi_y$; $V = u\eta_x + \frac{v}{x^\beta}\eta_y$; $U_w = u_w\xi_x + \frac{v_w}{x^\beta}\xi_y$; $V_w = u_w\eta_x + \frac{v_w}{x^\beta}\eta_y$; $u_w = x_\tau$; $v_w = y_\tau x^\beta$; $\sqrt{|h|} = J\sqrt{|g|}$; $|g| = x^{2\alpha} \sin^{2\beta} y$; $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$; $E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$; $\beta = \alpha(\alpha - 1)/2$, $\alpha = 1, 2$ для цилиндрической ($x = r, y = -z$) и сферической ($x = r, y = \theta$) систем отсчета соответственно; u, v — компоненты вектора скорости частицы среды; u_w, v_w — компоненты вектора скорости СЭЛ координат.

Граничные условия на поверхности пузырька имеют вид:

$$U^{o+} = U^{o-} = D, \quad p^+ = p^- + 2H\sigma,$$

где $U^o = U/\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 x^{-2\beta}}$.

В начальный момент времени уравнение поверхности пузырька $r = r_s$ в сферических координатах (r, θ, φ) представляется следующим образом:

$$r_s^0 = R^0 + a_i^0 P_i(\cos \theta).$$

Здесь R^0 — начальный средний радиус пузырька; P_i — полином Лежандра степени $i > 1$. Параметр a_i^0 определяет величину начального отклонения поверхности от сферы в виде P_i , а в произвольный момент времени он вычисляется по формуле

$$a_i(t) = \frac{2i + 1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r_s(\theta, t) P_i(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Начальное распределение неизвестных параметров определяется из упрощенной модели с расщеплением на сферическую составляющую и ее малого несферического возмущения.

3 Методика расчета

При сильных сжатиях пузырька могут возникать ударные волны, поэтому в качестве метода численного решения уравнений динамики газа и жид-

кости принят широко используемый в литературе метод Годунова для подвижной системы координат [2]. В своем классическом варианте метод Годунова имеет первый порядок аппроксимации. Для решения одномерных задач динамики пузырька довольно успешно применяются схемы первого порядка [3]. В настоящей работе показано, что такой подход для решения двумерных задач динамики пузырька оказывается практически неприемлемым в силу больших затрат компьютерного времени. Поэтому произведена модификация метода Годунова на основе хорошо зарекомендовавших себя разностных схем типа TVD и ENO второго порядка аппроксимации. При применении TVD-схем, не увеличивающих полную вариацию, снижается порядок аппроксимации в ряде особых точек, а ENO-схемы [4] обеспечивают второй порядок аппроксимации всюду, но теряют свойство TVD. Вместе с тем потеря свойства TVD в ENO-схемах происходит лишь на уровне погрешности аппроксимации, что обычно является вполне приемлемым. В работе показано, что для рассматриваемых задач динамики пузырька применение ENO-схемы оказывается более предпочтительным.

4 Результаты расчетов

Для демонстрации эффективности предлагаемой методики решена задача свободных колебаний эллипсоидальной полости в жидкости. Исходные данные: $R^0 = 1$ мкм, $r_\infty^0 = 5R^0$, $a_2^0 = 0.00066R^0$, $\sigma = 7.3$ Н/м, $p^0 = 1$ бар, $\rho^0 = 858$ кг/м³. Результаты представлены на Рис. 1. Расчетная область равномерно разбивается на $N_r \times N_\theta$ ячеек, где N_r — число ячеек по радиусу, а N_θ — по углу. Видно, что применение ENO-схемы (Рис. 1(b)) позволяет добиться сходимости к точному решению для несжимаемой жидкости (сплошная линия) уже на сетке 500×250 , а классическая схема Годунова (Рис. 1(a)) требует дальнейших расчетов, что приводит к существенному росту затрат компьютерного времени.

Для иллюстрации правильности описания сферического и несферического движения поверхности пузырька, а также их взаимодействия рассматривается задача динамики эллипсоидальной полости в слое жидкости с начальным отклонением $a_2^0 = 0.005R^0$. Если внешнюю границу двигать по гармоническому закону $r_\infty = r_\infty^0 + A \sin \omega t$, где $r_\infty^0 = 2R^0$; $A = 0.01$ мкм; $\omega/2\pi = 3$ МГц, а на внутренней как и раньше учитывать поверхностное натяжение, то кроме несферических колебаний, можно наблюдать и радиальное движение поверхности полости. На Рис. 2 представлены результаты расчетов для сжимаемой и несжимаемой жидкости в случае подвижной внешней границы и несжимаемой жидкостей с неподвижной внешней границей. Видно, что в первом случае кривые совпадают с удовлетворительной точностью, а кривая, соответствующая случаю неподвижной внешней границы, отклоняется от них. Таким образом, методика, основанная на

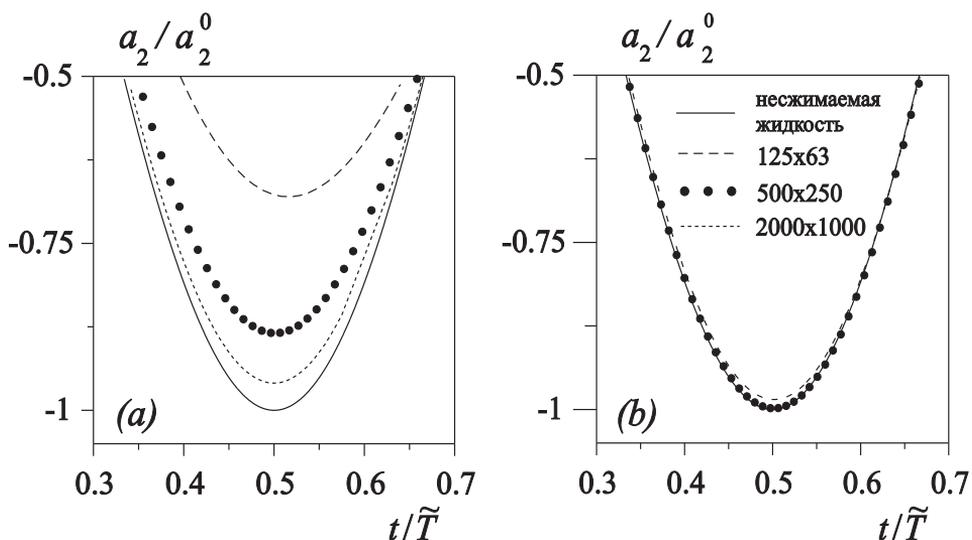


Рис. 1. Зависимость относительного отклонения от относительного времени в задаче свободных колебаний полости в жидкости при использовании а) классической схемы Годунова и б) ENO-модификации схемы Годунова на различных сетках, \tilde{T} — период колебаний несжимаемой жидкости

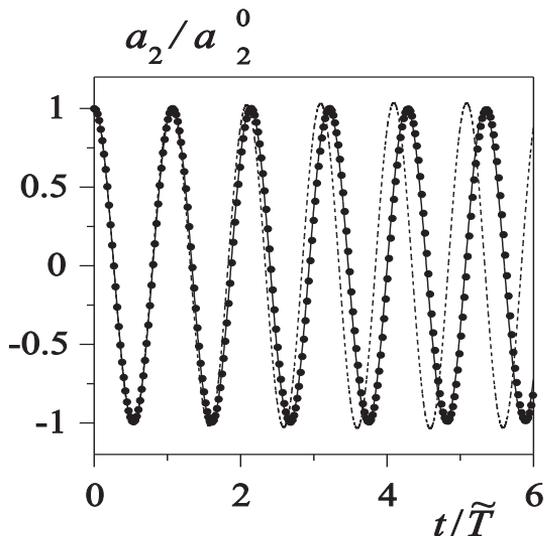


Рис. 2. Зависимость относительного отклонения от относительного времени в задаче динамики полости в слое несжимаемой (сплошная линия) и сжимаемой (символы ●) жидкости с амплитудой радиальных колебаний внешней границы равной $A = 0.01$ мкм. Пунктирной линией обозначен случай неподвижной внешней границы

ENO-схеме, хорошо улавливает даже незначительные изменения отклонения, вызванные радиальным движением внешней поверхности.

5 Заключение

Разработана методика расчета сильного сжатия осесимметричного газового пузырька в жидкости методом прямого численного моделирования на основе уравнений динамики жидкости и газа. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных при решении задачи свободных колебаний полости в жидкости с использованием классической схемы Годунова и ее ENO-модификации. Выявлено, что наиболее оптимальным соотношением точности и экономичности среди рассмотренных схем обладает ENO-схема. На примере задачи динамики газовой полости в слое жидкости показано, что предлагаемая методика эффективно описывает не только сферическое и несферическое движение поверхности, но и их взаимное влияние друг на друга.

Авторы выражают благодарность К. Р. Закирову из ИМех УНЦ РАН за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Аганин А. А., Гусева Т. С. Изменение малого искажения сферической формы газового пузырька при его сильном расширении–сжатии // ПМТФ. 2005. № 4. С. 17–22.
- [2] Годунов С. К., Забродин А. В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [3] Aganin A. A. Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2000. V. 33. Pp. 157–174.
- [4] Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comp. Phys. 1987. V. 71. Pp. 231–303.