УДК 532.546; 533.15

Алгоритм диагностирования закреплений трубы с жидкостью

А. М. Ахтямов, Г. Ф. Сафина

Башкирский государственный университет, Уфа

Аннотация. Рассматривается алгоритм диагностирования закреплений узкой трубы, наполненной жидкостью по одному спектру собственных частот ее изгибных колебаний. Построенный алгоритм, основанный на решении систем алгебраических уравнений, позволяет при непротекании жидкости по трубе определять любые закрепления трубы по 9-ти значениям из спектра частот ее колебаний.

Ключевые слова: диагностирование, спектр частот, собственные колебания

---

1 Задача диагностирования

Методы диагностики, основанные на измерении частот собственных колебаний, имеют достаточно широкое распространение. Диагностирование закреплений трубы с жидкостью по собственным частотам ее колебаний является важным в связи с необходимостью решений задач акустической диагностики труб и виброзащиты топливных систем.

Зависимости собственных частот колебаний трубы с жидкостью от таких закреплений, как защемления и шарнирные опирания, исследованы в работах М. А. Ильгамова, А. С. Вольмира, Томсона [1–3]. Однако обратное влияние — влияние собственных частот на параметры и вид закреплений — в этих работах не исследовано.

Дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний упругой трубы с несжимаемой жидкостью известно [1] и имеет вид:

$$E\,I\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(m+\bar m)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\,\bar m\,V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\bar m\left(\frac{p_0}{\rho_0}+V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (1)$$

Здесь

$$I=\frac{\pi}{4}(r^4-r_1^4);\quad m=\pi\,(r^2-r_1^2\,)\rho;\quad \bar{m}=\pi\,r_1^2\,\rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения; EI — жесткость трубы; p_0 — внутреннее давление; m и $\bar{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы; r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения; V_0 — скорость движения жидкости; ρ — плотность материала трубы; ρ_0 — плотность жидкости.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки в виде [1] $w=\partial^2 w/\partial x^2=0$, принято в форме

$$w=\sum_{s=1}^{\infty}W_s\,\sin\frac{s\,\pi}{l}\,x\,e^{i\,\omega\,t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина.

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи. После введения безразмерных переменных $\widetilde{x}=x/l$, $\widetilde{w}=w/r$, $\widetilde{t}=t/\tau$ и выражения прогиба в виде $\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{t})=X(\widetilde{x})\,e^{i\,\omega\,\widetilde{t}}$, уравнение (1) представлено в виде линейного дифференциального уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$X^{(4)}+a\,X''+2b\,i\,\omega X'-\omega^2\,X=0. \tag{2}$$

К полученному уравнению поставлены краевые условия

$$\begin{array}{ll} U_1(X)=a_1X(0)+a_4X'''(0)=0, & U_2(X)=a_2X'(0)+a_3X''(0)=0,\\ U_3(X)=b_1X(1)+b_4X'''(1)=0, & U_4(X)=b_2X'(1)+b_3X''(1)=0, \end{array} \tag{3}$$

определяющие все возможные закрепления концов трубы. Уравнение частот получено из условия равенства нулю характеристического определителя $\Delta(\omega_k)$.

Справедливы обозначения работы [3] о введении матрицы C, состоящей из коэффициентов краевых условий (3), и представлении краевых условий в виде:

$$U_i(X)=\sum_{j=1}^{4}\left[c_{ij}\,X^{(j-1)}(0)+c_{i,4+j}\,X^{(j-1)}(1)\right]=0,\quad i=1,\,2,\,3,\,4. \tag{4}$$

В этих обозначениях з а д а ч а д и а г н о с т и р о в а н и я состоит в том, что *коэффициенты* c_{ij} *задачи (2), (4) неизвестны; ранг матрицы* C *равен четырем; известны собственные значения* ω_k *задачи (2), (4); требуется найти линейную оболочку* $\langle \mathbf{c}_1,\,\mathbf{c}_2,\,\mathbf{c}_3,\,\mathbf{c}_4\rangle$*, построенную на векторах* $\mathbf{c}_i=(c_{i1},\,c_{i2},\,c_{i3},\,c_{i4},\,c_{i5},\,c_{i6},\,c_{i7},\,c_{i8})^{\mathrm{T}}$.

Наряду с линейными формами (4) рассмотрены также формы

$$\widetilde{U}_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \left[\widetilde{c}_{ij}\, X^{(j-1)}(0) + \widetilde{c}_{i,4+j}\, X^{(j-1)}(1) \right] = 0, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4, \qquad (5)$$

в которых коэффициенты $\widetilde{c}_{ij}$ образуют матрицу $\widetilde{C}$. Введены в рассмотрение векторы $\mathbf{c}_i^+ = (\widetilde{c}_{i1}, \widetilde{c}_{i2}, \widetilde{c}_{i3}, \widetilde{c}_{i4}, \widetilde{c}_{i5}, \widetilde{c}_{i6}, \widetilde{c}_{i7}, \widetilde{c}_{i8})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c}_i^- = (\widetilde{c}_{i5}, \widetilde{c}_{i6}, -\widetilde{c}_{i7}, -\widetilde{c}_{i8}, \widetilde{c}_{i1}, \widetilde{c}_{i2}, -\widetilde{c}_{i3}, -\widetilde{c}_{i4})^{\mathrm{T}}$. Также введены матрица $\widetilde{C}^-$, составленная из векторов $\widetilde{c}_{ij}^{\,-}$, и классы матриц $[C]$, $[\widetilde{C}]$, $[\widetilde{C}^-]$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (о двойственности решения задачи). *Пусть* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = 4$. *Если собственные значения* $\{\omega_k\}$ *задачи (2), (4) и* $\{\widetilde{\omega}_k\}$ *задачи (2), (5) совпадают с учетом их кратностей, то либо* $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^+,\, \mathbf{c}_2^+,\, \mathbf{c}_3^+,\, \mathbf{c}_4^+ \right\rangle$, *либо* $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^-,\, \mathbf{c}_2^-,\, \mathbf{c}_3^-,\, \mathbf{c}_4^- \right\rangle$.

Теорема 2 (об устойчивости решения задачи). *Пусть* $\{\omega_k\}$ *и* $\{\widetilde{\omega}_k\}$ $(k = 1, \ldots, 9)$ *— собственные частоты задач (2), (4) и (2), (5) соответственно;* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = \operatorname{rank} \widetilde{C}^- = 4$; $C \in [C]$, $\widetilde{C} \in [\widetilde{C}]$, $\widetilde{C}^- \in [\widetilde{C}^-]$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для собственных частот, удовлетворяющих неравенству* $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$, *выполняются* $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}| < \epsilon$, $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}^{\,-}| < \epsilon$.

2 Алгоритм отыскания краевых условий

Построим теперь алгоритм решения задачи, основанный на решении системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть $\{\omega_k\}$ — собственные частоты изгибных колебаний трубопровода удовлетворяют частотному уравнению $\Delta(\omega_k) = 0$.

Если ω_k — лишь девять собственных частот из всего спектра задачи (2), (4), то равенства $\Delta(\omega_k) = 0$ образуют систему 9-ти линейных алгебраических уравнений относительно 10-ти неизвестных x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}:

$$\begin{gathered} \Delta(\omega_k) = x_1\, f_{1257}(\omega_k) + x_2\, f_{1268}(\omega_k) + \\ + x_3\, f_{1368}(\omega_k) + x_4\, f_{1278}(\omega_k) + \\ + x_5\, f_{1378}(\omega_k) + x_6\, f_{2478}(\omega_k) + \\ + x_7\, f_{1357}(\omega_k) + x_8\, f_{2468}(\omega_k) + x_9\, f_{1256}(\omega_k) + x_{10}\, f_{3478}(\omega_k) = 0, \end{gathered} \qquad (6)$$

где

$$\begin{gathered} x_1 = M_{1257} - M_{1356}; \quad x_2 = M_{1268} - M_{2456}; \\ x_3 = M_{1368} + M_{2457}; \quad x_4 = M_{1278} + M_{3456}; \\ x_5 = M_{1378} - M_{3457}; \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468}; \\ x_7 = M_{1357}; \quad x_8 = M_{2468}; \quad x_9 = M_{1256}; \quad x_{10} = M_{3478}. \end{gathered}$$

Здесь $M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ — миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами k_1, k_2, k_3, k_4, а $f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ — миноры матрицы

$$D = \left\| \begin{array}{cccc} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(1) & X_2(1) & X_3(1) & X_4(1) \\ X_1'(1) & X_2'(1) & X_3'(1) & X_4'(1) \\ X_1''(1) & X_2''(1) & X_3''(1) & X_4''(1) \\ X_1'''(1) & X_2'''(1) & X_3'''(1) & X_4'''(1) \end{array} \right\|,$$

составленные из строк с номерами k_1, k_2, k_3, k_4.

Если rank $\|f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}(\omega_k)\|_{10\times 9} = 9$, то система линейных алгебраических уравнений (6) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. По значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ находятся (с точностью до эквивалентных) две матрицы C.

Покажем, как это делается. Так как rank C = 4, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1256} \neq 0$. Тогда из теоремы 1 следует, что матрицу C с помощью линейных преобразований можно привести к виду

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0 \end{array} \right\|$$

или

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & 0 \end{array} \right\|.$$

Миноры полученных матриц обозначим соответственно через M_{ijkl} и M^{-}_{ijkl} $\;(i = 1, ..., 5;\; j = 2, ..., 6;\; k = 3, ..., 7;\; l = 4, ..., 8)$.

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{2456}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M_{1356}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{1268}}{M_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M_{1257}}{M_{1256}} & 0 \end{array} \right\|$$

или
$$\left\|\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{M^-_{2456}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M^-_{1356}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{M^-_{1268}}{M^-_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M^-_{1257}}{M^-_{1256}} & 0 \end{array}\right\|.$$

Для первой матрицы имеем $M_{1356} = a_3$, $M_{2456} = -a_4$, $M_{1256} = b_3$, $M_{1268} = -b_4$, для второй матрицы $M^-_{1356} = -b_3$, $M^-_{2456} = b_4$, $M^-_{1257} = -a_3$, $M^-_{2468} = a_4$.

Таким образом, по найденному алгоритму определяются две группы миноров, по которым восстанавливаются две матрицы C, а, следовательно, диагностируются закрепления трубы с точностью до перестановок их местами.

3 Заключение

Построенный алгоритм решения задачи может быть применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются трубопроводы. С помощью предложенного алгоритма можно также судить о виброзащитных закреплениях трубы с жидкостью. Алгоритм позволяет по 9-ти значениям собственных частот колебаний трубы определять не только упругие закрепления, но и жесткие защемления, шарнирные опирания, свободные концы и тому подобное.

Список литературы

[1] Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М: Наука, 1969.

[2] Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979.

[3] Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 254 с.

[4] Сафина Г.Ф. Диагностирование закреплений трубопровода с жидкостью // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. 2006. № 3. С. 59–60.