УДК 532.529

Задачи устойчивости плоскопараллельных течений запыленного газа[1]

С. А. Боронин

НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Аннотация. В рамках двухконтинуального подхода рассматриваются различные модификации постановки задач устойчивости плоскопараллельных течений двухфазных сред. Учитывается ряд новых факторов: неоднородность концентрации частиц и рассогласование скоростей фаз в основном течении, подъемная сила Сэфмана в межфазном обмене импульсом, конечность объемной концентрации частиц. Целью работы является анализ влияния данных факторов на критические числа Рейнольдса и положение границы области неустойчивости на примере двухфазных течений в плоском канале и пограничном слое на пластине.

Ключевые слова: устойчивость, двухфазная среда, частицы, нейтральная кривая, сила Сэфмана

1 Введение

Задача о гидродинамической устойчивости плоскопараллельного запыленного потока была впервые рассмотрена в [1] в предположении стоксовского закона сопротивления, однородного распределения частиц и отсутствия скоростного скольжения фаз в основном течении. В литературе имеются работы, в которых в линейной постановке, близкой к [1], численно исследуются нейтральные кривые для различных плоскопараллельных запыленных потоков. В настоящей работе предложено развитие теории устойчивости плоскопараллельных дисперсных потоков с учетом: значительной неоднородности концентрации частиц в основном течении (что типично

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05–01–00502)

для сдвиговых двухфазных течений [2]); наличия подъемных сил Сэфмана в межфазном обмене импульсом (наиболее существенных для течений в пограничных слоях); рассогласования соростей фаз в основном течении (что важно при учете гравитационных эффектов), а также конечности объемной доли частиц (что необходимо для описания суспензий и пузырьковых сред).

2 О базовой модели дисперсной смеси

Для описания движения гетерогенной среды в качестве базовой принята двухконтинуальная модель [3]. Смесь состоит из вязкой несжимаемой несущей фазы и дисперсных частиц. Частицы — сферы одинакового радиуса σ, массы m.

Запишем в безразмерном виде систему уравнений двухконтинуальной модели [3] в предположении бесконечно малой объемной (но конечной массовой) концентрации частиц:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle\mathbf{v} - n\alpha\mathbf{f}_{St} - n\alpha\mathbf{f}_{Saf}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v_s}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{v_s}}{dt} = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_{Saf},$$

$$\mathbf{f}_{St} = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v_s}), \quad \mathbf{f}_{Saf} = K\mathbf{j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right)^{1/2}(u - u_s), \tag{2}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu}, \quad \alpha = \frac{mN_0}{\rho}, \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu L}{mU_0},$$

$$K = \frac{6.46\sigma^2(L\mu\rho)^{1/2}}{mU_0^{1/2}} = \frac{6.46}{2\pi\sqrt{2}}\sqrt{\beta}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_s^0}}. \tag{3}$$

Здесь орт $\mathbf{j}$ направлен перпендикулярно направлению потока и сонаправлен с градиентом скорости; ρ, ρ_s^0 — плотности несущей фазы и материала частиц; n — числовая концентрация частиц; $\mathbf{f}_{St}$ — сила Стокса; $\mathbf{f}_{Saf}$ — сила Сэфмана [4]. При обезразмеривании декартовы координаты отнесены к масштабу длины L, компоненты скоростей фаз — к характерному значению скорости U_0, давление — к ρU_0^2, концентрация частиц — к N_0. Помимо числа Рейнольдса система (1)–(2) содержит три параметра подобия: α — относительную массовую концентрацию частиц, β — параметр инерционности частиц (обратное число Стокса), равный отношению масштаба длины к длине скоростной релаксации частиц, и K — параметр, характеризующий вклад силы Сэфмана в межфазное взаимодействие.

Рассматривается несколько постановок задач устойчивости плоскопараллельных течений многофазный сред. Эффекты неоднородности концентрации частиц и подъемной силы Сэфмана исследованы на примере течения запыленного газа в пограничном слое. Влияние рассогласования скоростей фаз в основном потоке рассматривается на примере течения запыленного газа в вертикальном плоском канале в поле силы тяжести. Кроме того, рассматривается эффект конечной объемной доли частиц на устойчивость течения двухфазной среды на примере течения суспензии в плоском канале без учета силы тяжести. При этом течение описывается уравнениями, аналогичными (1)–(2), но с вязкостью, зависящей от объемной доли частиц (формула Эйнштейна) и межфазной силой в форме [5].

3 Постановка задачи устойчивости течения двухфазной среды

Следуя стандартной процедуре исследования линейной устойчивости, представляем течение в виде суперпозиции основного течения, описываемого профилями скорости $U(y)$ и $U_s(y)$, и малых возмущений в виде бегущих волн $q(y)\exp ik(x-ct)$, где k — волновое число; $c=c_r+ic_i$ — фазовая скорость волны.

Не останавливаясь подробно на системах уравнений для каждого из указанных выше случаев плоскопараллельных потоков двухфазных сред, перечислим параметры основных течений и определяющие безразмерные параметры:

1) Течение в пограничном слое: $U(y)=U_s(y)$ — профиль Блазиуса в эффективной среде [6]. Рассматриваются три профиля числовой концентрации частиц $N(y)$, качественно соответствующие возможным решениям задачи о течении запыленного газа в пограничном слое [2]:

$$\text{а) } N(y)=1+\exp\{-y\},\quad \text{б) } N(y)=1,\quad \text{в) } N(y)=1-0.5\exp\{-y\}. \qquad (4)$$

Определяющие безразмерные параметры: Re, β, α, K. При исследовании влияния подъемной силы фиксировалось значение отношения плотностей фаз $\rho/\rho_s=10^{-3}$, и значение параметра K вычислялось через значение β (3).

2) Течение в вертикальном канале: $U(y)=1-y^2$, $U_s(y)=U(y)+I/(\beta Fr^2)$ — скорость частиц в основном течении отличается от скорости несущей фазы на константу, равную скорости гравитационного оседания для одиночной частицы (параметр $I=\pm 1$ определяется направлением течения в вертикальном канале). Определяющие параметры: Re, β, α и число Фруда: $Fr^2=U^2/(gL)$.

3) Течение суспензии в канале: $U(y)=U_s(y)=1-y^2$, $\theta_0=\text{const}$ — объемная концентрация примеси. Определяющие безразмерные параметры: Re, β, θ_0, $\eta=\rho_s^0/\rho$.

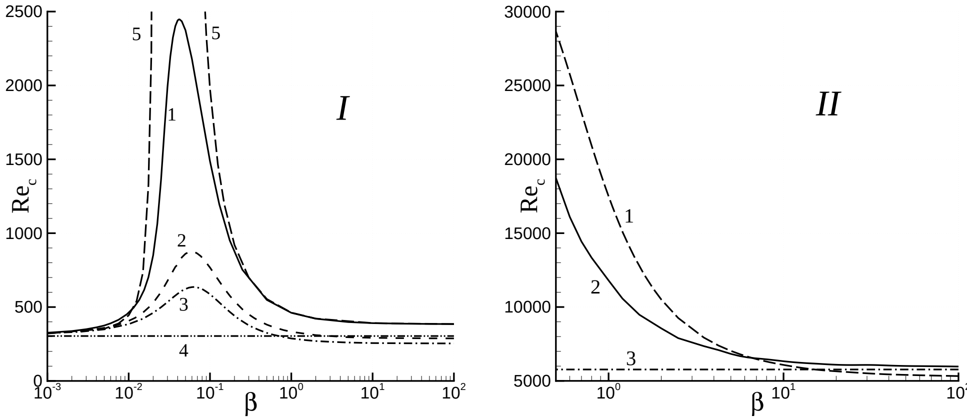

Рис. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра инерционности частиц β при $\alpha = 10\%$. I — Течение в пограничном слое. Кривые 1, 2, 3 соответствуют течению с профилями концентрации частиц а), б), в) без учета силы Сэфмана; 4 — чистый газ; 5 — профиль концентрации а), $K = K(\beta)$. II — течение суспензии в горизонтальном канале. Кривая 1 — $\theta_0 = 0$; 2 — $\theta_0 = 3.3\%$; 3 — чистый газ

Исключая давление из линеаризованной ситемы (1)–(2), выражая возмущения скоростей фаз через возмущения функции тока и дополняя указанную систему уравнений граничными условиями, получаем задачу на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка (типа Орра-Зоммерфельда с дополнительными членами), для численного решения которой был использован метод ортогонализации [7].

4 Обсуждение результатов

Для отладки алгоритма проводились тестовые расчеты для течения чистого и запыленного газов в канале, а также сравнение с отдельными собственными значениями и собственными функциями, полученными в [8, 9]. Было достигнуто совпадение результатов в четырех значащих цифрах.

Везде в расчетах, если не оговорено противное, значение массовой концентрации равно 10%.

Влияние неоднородности концентрации и подъемной силы. Течение в пограничном слое. Численные расчеты показывают, что без учета подъемной силы наиболее устойчивым является течение с увеличивающейся по направлению к стенке концентрацией частиц (Рис. 1(I), кривые 1–3). При этом максимальное критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 2800$ (по толщине пограничного слоя), соответствующее случаю частиц с длиной релаксации порядка толщины пограничного слоя, практически на порядок больше, чем в чистом газе. В случае концентрации частиц, уменьшающейся в направлении стенки, течение наименее устойчиво.

При учете силы Сэфмана в межфазном обмене импульсом в окрестности значения параметра инерционности частиц $\beta_0 \approx 0.028$ критическое число Рейнольдса существенно возрастает при всех рассматриваемых профилях концентрации частиц (Рис. 1(I), кривая 5).

Влияние рассогласования скоростей фаз в невозмущенном потоке. Течение в вертикальном канале в поле силы тяжести. Получено, что при любом конечном числе Фруда нейтральные кривые являются замкнутыми. При уменьшении числа Фруда и фиксированном значении параметра инерционности частиц область неустойчивости сужается, и в некоторой области параметров на плоскости (β, Fr) течение становится полностью устойчивым к малым возмущениям. Получено, что критические числа Рейнольдса при любых исследованных значениях параметров Fr, β выше, чем в случае течения в горизонтальном канале (без учета силы тяжести).

Влияние конечной объемной концентрации частиц. Течение суспензии в плоском канале. В случае объемной доли $\theta_0 = 3.3\%$ и $\alpha = \theta\eta = 10\%$ при умеренных значениях параметра инерционности течение менее устойчиво, чем в случае нулевой объемной доли при том же значении α (Рис. 1(II)). При больших значениях параметра инерционности частиц $\beta > 30$ («мелкие» частицы) течение с конечной объемной долей частиц более устойчиво как в сравнении со случаем нулевой объемной доли, так и с течением чистого газа.

5 Заключение

В рамках модели взаимопроникающих континуумов рассмотрены различные обобщения постановки задачи линейной устойчивости плоскопараллельного движения дисперсной смеси. Исследовано влияние четырех факторов на устойчивость течения двухфазной среды: неоднородности концентрации частиц, наличия подъемной силы, рассогласования скоростей фаз в основном течении, конечной объемной доли частиц.

Показано, что без учета подъемной силы наиболее устойчивым является течение в пограничном слое с монотонно увеличивающейся по направлению к стенке концентрацией частиц. Существует диапазон значений параметра инерционности частиц, такой что при 10% массовой концентрации частиц на внешней границе пограничного слоя критическое число Рейнольдса увеличивается почти на порядок по сравнению с чистым газом. Учет подъемной силы приводит к значительной стабилизации течения в узком диапазоне значений параметра инерционности частиц, близких к значению, при котором достигается максимальная устойчивость при чисто стоксовском межфазном взаимодействии.

В случае вертикального канала рассогласование скоростей фаз в основном течении приводит к его значительной стабилизации, а в некотором диапазоне значений параметра инерционности частиц и числа Фруда течение устойчиво к любым малым возмущениям.

При умеренных значениях параметра инерционности частиц учет конечной объемной доли частиц приводит к понижению границы устойчивости течения.

Список литературы

[1] Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pp. 120–128.

[2] Осипцов А. Н Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР, МЖГ, 1988. № 6. С. 80–87.

[3] Marble F. E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. Pp. 397–446.

[4] Saffman P. G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pp. 385–400. Corrigendum: J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pp. 624.

[5] Brinkman H. C. Analysis of the electrophoretic mobility and viscosity of dilute Ludox solutions in terms of a spherical gel layer model // Appl. Sci. Res. Sect. A. 1947. V. 1. Pp. 27.

[6] Осипцов А. Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. АН СССР, МЖГ. 1980. № 4. С. 48–54.

[7] Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961, Т. 16, № 3. С. 171–174.

[8] Исаков Е. Б., Рудяк В. Я. Устойчивость течений разреженных газовзвесей и суспензий в плоском канале // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 79–85.

[9] Asmolov E. S., Manuilovich S.V. Stability of a dusty-gas laminar boundary layer on a flat plate // J. Fluid Mech. 1998. V. 365. Pp. 137–170.