УДК 534.113

Отражение продольной бегущей волны от надреза в стержне

М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Исследуется отражение от поперечного надреза и прохождение продольной волны, распространяющейся по бесконечному стержню. Получена зависимость отраженной волны от параметров надреза. Постановка обратной задачи позволяет определить координату надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

Ключевые слова: бесконечный стержень, надрез, продольная бегущая волна, отраженная волна, проходящая волна, диагностика

1 Введение. Постановка задачи

В протяженных объектах типа трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования. Но при доступности визуального осмотра не во всех случаях представляется возможным определение целостности конструкции. Здесь предлагается математическая модель для диагностики стержней с помощью замеров параметров продольных бегущих волн. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных изгибных колебаний [1].

Рассматривается отражение от надреза и прохождение продольной бегущей волны, распространяющейся по бесконечному стержню площадью поперечного сечения F. В точке с координатой x_c стержень имеет надрез длиной l и площадью поперечного сечения стержня f. Причем длина надреза l значительно меньше длины волны L (Рис. 1). Требуется определить отраженную и проходящую волны по известным параметрам надреза и

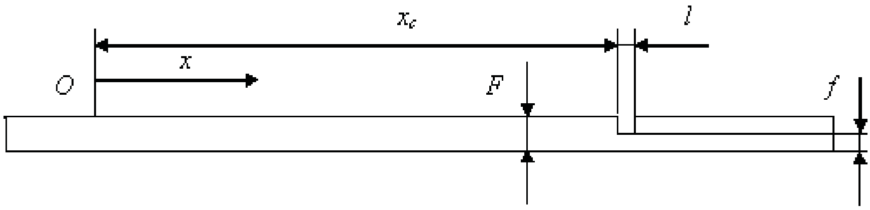

Рис. 1.

его координате (прямая задача). Определение координат надреза по отраженной волне в точке наблюдения и его размеров по отраженной и (или) проходящей волнам представляет собой обратную задачу.

Движение элемента стержня описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \tag{1}$$

где u — продольные перемещения элементов стержня; a — скорость звука в стержне; E, ρ — модуль упругости и плотность материала стержня; x — продольная координата; t — время. Продольные перемещения, возбуждаемые источником, находящемся на расстоянии $x = -\infty$, задаются в виде бегущей волны в сторону возрастания координаты x:

$$u = U \sin(\omega t - \alpha x), \quad \alpha = \frac{\omega}{a}, \quad L = \frac{2\pi a}{\omega}, \tag{2}$$

где U, ω — амплитуда и частота; α — волновое число.

Решение уравнения (1) для области распространения отраженной волны имеет вид:

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha x) + B_1 \sin(\omega t + \alpha x), \quad -\infty \le x \le x_c, \ \ 0 \le t < \infty, \tag{3}$$

а для области распространения проходящей волны:

$$u_2 = A_2 \cos(\omega t - \alpha x) + B_2 \sin(\omega t - \alpha x), \quad x_c \le x \le \infty, \ \ 0 \le t < \infty. \tag{4}$$

Граничные условия в точке $x = x_c$ [2]:

$$x = x_c, \quad \frac{\partial (U + u_1)}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad u_2 = U + u_1 + \frac{mL}{\pi} \frac{\partial u_2}{\partial x}, \tag{5}$$

где

$$m = \frac{\pi l F}{L f}.$$

2 Прямая задача

Из условий (5) получаем

$$A_1 = -D\frac{m\alpha L}{\pi}\left(\frac{m\alpha L}{\pi}\sin 2\alpha x_c - 2\cos 2\alpha x_c\right),$$
$$B_1 = D\frac{m\alpha L}{\pi}\left(\frac{m\alpha L}{\pi}\cos 2\alpha x_c + 2\sin 2\alpha x_c\right), \tag{6}$$
$$A_2 = -2D\frac{m\alpha L}{\pi}, \quad B_2 = 4D, \quad D = \frac{\pi^2 U}{(m\alpha L)^2 + 4\pi^2}.$$

Перейдя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \tau = \omega t$$

и учитывая, что $\alpha L = 2\pi$, падающую, отраженную и проходящую волны представим в виде:

$$u = U\sin(\tau - \xi), \quad -\infty \le \xi \le \xi_c, \quad 0 \le \tau < \infty,$$
$$u_1 = \frac{mU}{m^2+1}\left[(-m\sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c)\cos(\tau + \xi) + \right.$$
$$\left. + (m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c)\sin(\tau+\xi)\right], \quad -\infty \le \xi \le \xi_c, \quad 0 \le \tau < \infty, \tag{7}$$
$$u_2 = \frac{U}{m^2+1}\left[-m\cos(\tau - \xi) + \sin(\tau - \xi)\right], \ \xi_c \le \xi \le \infty, \ 0 \le \tau < \infty.$$

Отраженную и проходящую волны можно представить также в виде:

$$u_1 = k_1 U \sin[(\tau + \xi) - \varphi], \quad -\infty \le \xi \le \xi_c, \quad 0 \le \tau < \infty,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m\sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c},$$
$$u_2 = k_2 U \sin[(\tau - \xi) - \psi], \quad \operatorname{tg}\psi = m, \quad \xi_c \le \xi \le \infty, \quad 0 \le \tau < \infty.$$

где коэффициенты отражения k_1 и прохождения k_2 равны

$$k_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, \qquad k_2 = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}. \tag{8}$$

Угол сдвига фаз φ между падающей и отраженной волной определяется по формуле

$$\varphi = -2\xi + \operatorname{arctg}\frac{m\sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c}. \tag{9}$$

При $\xi = 0$ уравнение движения элемента стержня записывается

$$u_1 = k_1 U \sin(\tau - \varphi), \quad 0 \le \tau < \infty, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{m\sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c}.$$

Угол сдвига фаз между падающей и проходящей волной равен

$$\psi = \operatorname{arctg} m. \tag{10}$$

Из формул (8)–(10) видно, что коэффициенты отражения k_1 и прохождения k_2, а также угол сдвига фаз ψ между падающей и проходящей волной зависят только от параметра m. Угол сдвига фаз φ между падающей и отраженной волной зависит как от параметра m, так и от положения надреза ξ_c и координаты ξ места проведения замеров. При $m \to 0$ коэффициенты $k_1 \to 0$ и $k_2 \to 1$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\cos 2\xi_c}{\sin 2\xi_c} = \operatorname{tg}\left(2\xi_c - \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi = 2\left(\xi_c - \frac{\pi}{2}\right).$$

Суммарные перемещения V элемента стержня в точке наблюдения ($\xi = 0$) определяются по формуле

$$V = u + u_1 = U\sin\tau + \frac{mU}{m^2+1}\left[(-m\sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c)\cos\tau + \right.$$
$$\left. + (m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c)\sin\tau\right], \quad 0 \le \tau < \infty,$$

или

$$V = CU\sin(\tau - \delta), \quad 0 \le \tau < \infty,$$

$$C = \sqrt{\frac{2m^2(1+\cos 2\xi_c) + 1 + 2m\sin 2\xi_c}{1+m^2}}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{m(m\sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c)}{m^2(1+\cos 2\xi_c) + m\sin 2\xi_c + 1},$$

где C — амплитуды относительных суммарных перемещений; δ — угол сдвига фаз в суммарной волне.

На Рис. 2–3 приводятся зависимости относительного перемещения элемента стержня при $\xi = 0$ в отраженной волне от безразмерного времени τ. Чем больше m, тем больше величина сигнала в отраженной волне. С увеличением параметра m также увеличивается угол сдвига фаз в отраженной волне. С изменением расположения надреза ξ_c также существенно изменяется угол сдвига фаз в отраженной волне.

Видно, что отраженные волны зависят от величины и положения надреза в стержне. Расчеты показывают, что для величины $\xi_c = 1$ и $\xi_c = 5$ кривые идентичны.

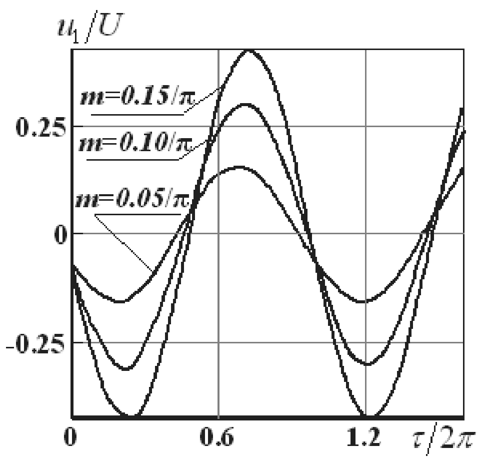

Рис. 2. Зависимость относительного перемещения элемента стержня при $\xi = 0$, $\xi_c = 2\pi/3$ в отраженной волне от безразмерного времени

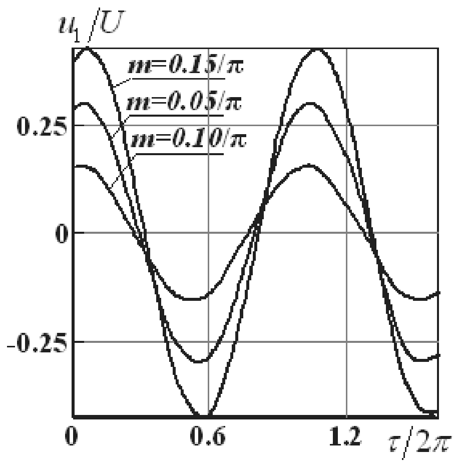

Рис. 3. Зависимость относительного перемещения элемента стержня при $\xi = 0$, $\xi_c = 2\pi$ в отраженной волне от безразмерного времени

Зависимость коэффициента отражения k_1 от параметра m приводится на Рис. 4. Видна линейная зависимость коэффициента отражения от параметра m для малых значений этого параметра.

Изменение угла сдвига фаз в отраженной волне от параметра m для различных значений ξ_c приводится на Рис. 5. С ростом параметра m происходит увеличение угла сдвига фаз.

Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от параметра ξ_c для различных значений m дается на Рис. 6. Видна периодическая зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от положения надреза.

3 Обратная задача

Из соотношений (8)–(10) следует, что по известным коэффициентам отражения k_1 и прохождения k_2 можно определить параметр m:

$$m = \frac{k_1}{\sqrt{1-k_1^2}}, \qquad m = \frac{\sqrt{1-k_2^2}}{k_2}. \tag{12}$$

Параметр m также определяется по углу сдвига фаз ψ между падающей и проходящей волнами

$$m = \operatorname{tg}\psi. \tag{13}$$

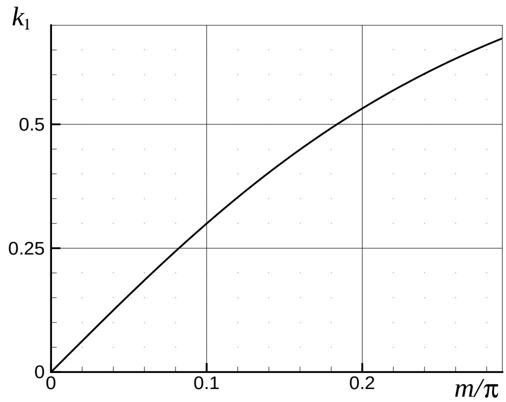

Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения k_1 от параметра m

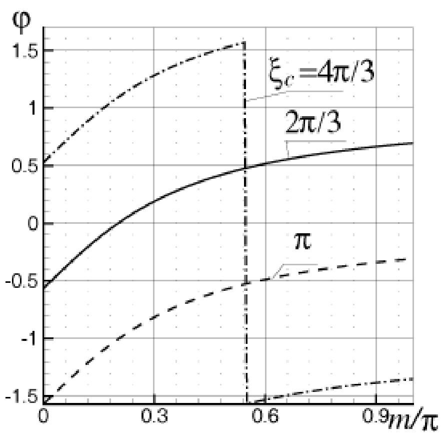

Рис. 5. Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от m

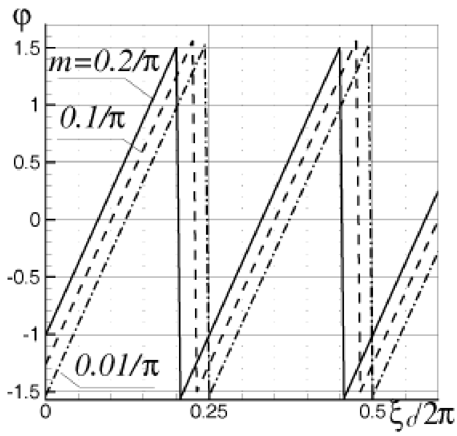

Рис. 6. Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от ξ_c

Положение надреза ξ_c определяется по формуле

$$\xi_c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1 + m\,\mathrm{tg}\,(2\xi + \varphi)}{m - \mathrm{tg}\,(2\xi + \varphi)}.$$

Но данная функция многозначная, поэтому можно рекомендовать замеры угла сдвига фаз φ между падающей и отраженной волнами для двух значений ξ. Например:

$$\text{при}\quad \xi = 0 \qquad \xi_c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1 + \pi m\,\mathrm{tg}\,\varphi_0}{\pi m - \mathrm{tg}\,\varphi_0};$$

$$\text{при}\quad \xi = \xi_1 \qquad \xi_c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1 + m\,\mathrm{tg}\,(2\xi_1 + \varphi_1)}{m - \mathrm{tg}\,(2\xi_1 + \varphi_1)}.$$

Выражение для амплитуды относительных суммарных перемещений может быть представлено в виде:

$$2m^2\left(1 + \cos 2\xi_c\right) - C^2\left(1 + m^2\right) + 2m \sin 2\xi_c + 1 = 0.$$

А из условия $V(\tau_1) = 0$ имеем

$$\sin\tau_1 + \frac{m}{m^2+1}\left[(-m\sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c)\cos\tau_1 + (m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c)\sin\tau_1\right] = 0.$$

Если значение амплитуды суммарных относительных перемещений C и величину $\tau_1(\tau_1 = \delta)$ определить в точке $\xi = 0$ по показаниям прибора, то получим систему уравнений для определения параметра m и положения надреза ξ_c

$$\left\{\begin{array}{l} 2m^2(1+\cos 2\xi_c) - C^2(1+m^2) + 2m\sin 2\xi_c + 1 = 0, \\ \sin\tau_1 + \dfrac{m}{m^2+1}[(-m\sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c)\cos\tau_1 + \\ +(m\cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c)\sin\tau_1] = 0. \end{array}\right.$$

Решение этой системы уравнений громоздкое, поэтому здесь не приводится. Если параметр m определить из (12) или (13), то координата надреза ξ_c определяется по формуле

$$\xi_c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big\{\Big[m^2\left(C^2 - 2\right) + C^2 - 1 +$$
$$+\sqrt{m^2C^2\left(4 - C^2\right) + 2C^2\left(3 - C^2\right) - \frac{\left(1 - C^2\right)^2}{m^2}}\;\Bigg]\left(m^2 + 1\right)^{-1}\Big\}.$$

Изменение параметра m и координаты надреза ξ_c от амплитуды C суммарных перемещений при $\xi = 0$ приводится на Рис. 7(a) и 7(b) для различных значений угла сдвига фаз в суммарной волне. А на Рис. 7(c) и 7(d)

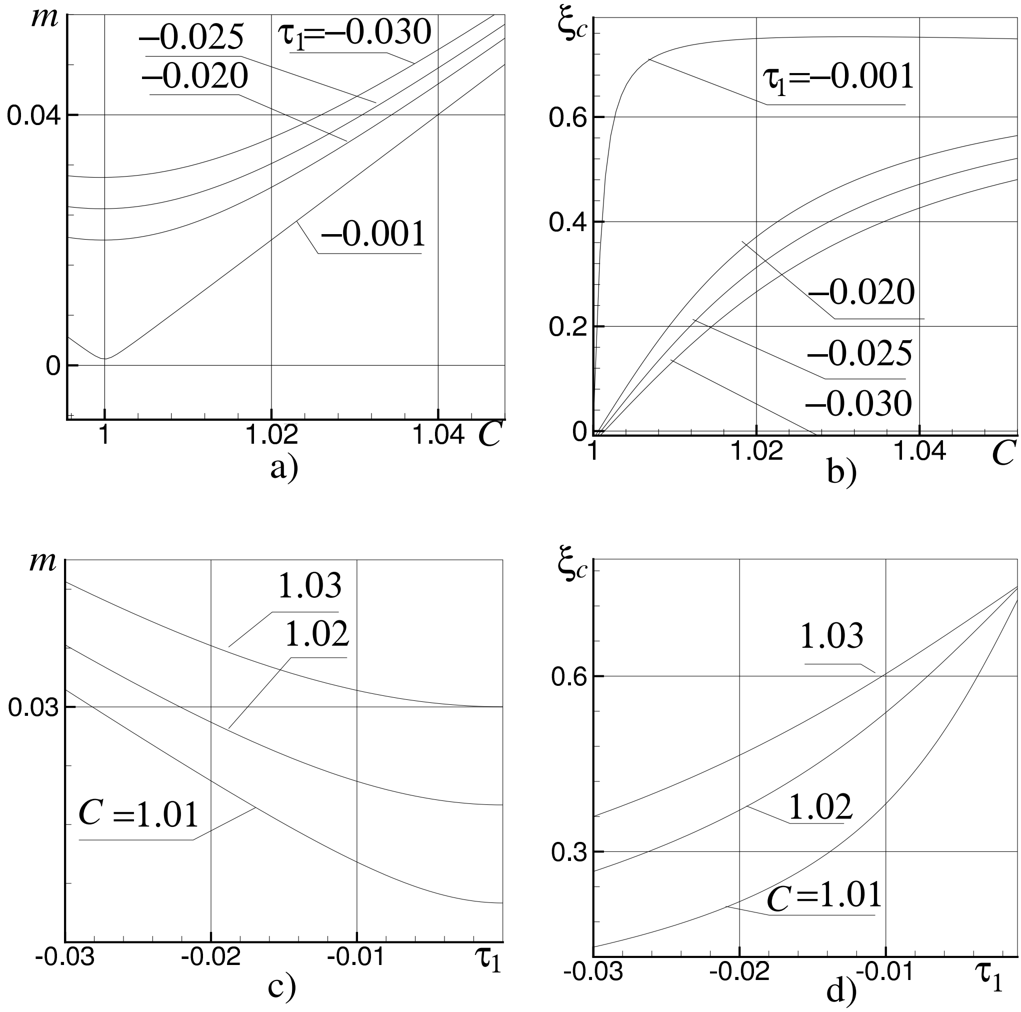

Рис. 7. a) Зависимость параметра m от амплитуды C суммарных перемещений при $\xi = 0$; b) Зависимость координаты надреза ξ_c от амплитуды C суммарных перемещений при $\xi = 0$; c) Зависимость параметра m от угла сдвига фаз в суммарной волне при $\xi = 0$; d) Зависимость координаты надреза ξ_c от угла сдвига фаз в суммарной волне при $\xi = 0$

даются зависимости этих же функций от угла сдвига фаз для различных значений амплитуды суммарных перемещений. С ростом амплитуды суммарных перемещений при одном и том же значении угла сдвига фаз происходит увеличение параметра m (Рис. 7(a)) и увеличение координаты надреза ξ_c (Рис. 7(b)). Таким образом, по замеренным значениям амплитуды C суммарных перемещений и угла сдвига фаз в суммарной волне можно определить параметр m и координату надреза ξ_c.

4 Заключение

Таким образом, анализ отраженных и суммарных волн позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и угол сдвига фаз зависят от величины и положения надреза на стержне.

Следует отметить что, чем больше параметр m, тем больше угол сдвига фаз в отраженной волне при одном и том же ξ_c.

Получена линейная зависимость коэффициента отражения от величины надреза.

Полученная методика может быть применена для разработки прибора для диагностики длинных стержневых систем.

Список литературы

[1] Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика». 2005. № 5. 7 с.

[2] Ильгамов М. А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Настоящий сборник.