



УДК 532.546; 533.15

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСФЕРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПУЗЫРЬКА ГАЗА В ЖИДКОСТИ¹

Л. А. Косолапова, В. Г. Малахов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Аннотация. Предложена математическая модель нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости, в которой изменение формы поверхности пузырька представляется в виде ряда сферических гармоник, а уравнения записываются с точностью до третьего порядка амплитуд искажения сферической формы пузырька. Показано, что применение уточненной модели может приводить к режимам колебаний, отличающимся от полученных с использованием квадратичной модели.

Ключевые слова: нелинейные колебания, двухфазная среда, математическое моделирование, газовый пузырек, потенциальное течение

1 Введение

Изучаются нелинейные эффекты, обусловленные немалыми искажениями сферической формы газового пузырька, колеблющегося в жидкости, при периодическом изменении давления вдали от пузырька. В рамках квадратичной модели такие исследования проведены в [1, 2] и др. В [3] получена модель третьего порядка для изучения эллипсоидальных колебаний формы пузырька. В [4] с использованием модели третьего порядка изучались колебания пузырька в идеальной несжимаемой жидкости с учетом трансляционного движения пузырька. В настоящей работе предложена модель

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00415) и в рамках программы ОЭМШУ РАН

третьего порядка при приближенном учете вязкости и сжимаемости жидкости.

2 Математическая модель

Предполагается, что движение жидкости, окружающей пузырек, потенциальное и осесимметричное. Влияние вязкости учитывается через динамическое граничное условие на межфазной поверхности. Жидкость около пузырька считается несжимаемой.

Движение жидкости в сферической системе координат r, θ, φ описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho_f} = 0, \quad (1)$$

где t — время; p, p_∞ — давление в жидкости в рассматриваемой точке и «на бесконечности»; ρ_f — плотность жидкости; Φ — потенциал скорости.

Считается, что газ в пузырьке идеальный с равномерным распределением давления, подчиняющегося следующему закону

$$p^- = p_b^0 \left(\frac{V_0 - bV_0}{V - bV_0} \right)^\gamma. \quad (2)$$

Здесь p_b^0 — начальное давление газа в пузырьке; V_0, V — начальный и текущий объемы пузырька; b — постоянная; γ — показатель адиабаты.

На поверхности пузырька $r = r_s(\theta, t)$ записываются кинематическое граничное условие равенства проекций скоростей жидкости и поверхности на нормаль \mathbf{n} к деформированной поверхности

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_s} - \frac{1}{r_s^2} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right|_{r=r_s} \frac{\partial r_s}{\partial\theta} = \frac{\partial r_s}{\partial t} \quad (3)$$

и динамическое граничное условие равенства нулю суммы проекций сил на нормаль \mathbf{n}

$$p^+ = p^- - 2\sigma H + \tau_{nn}, \quad (4)$$

где σ — поверхностное натяжение; $\tau_{nn} = 2\mu\Phi_{nn}$ — вязкое напряжение; μ — динамический коэффициент вязкости.

Предположение о потенциальности поля скоростей в жидкости исключает возможность использования динамического граничного условия по касательной, так как система становится переопределенной. Поэтому в предлагаемой модели требуется выполнение только условия (4).

Уравнение поверхности пузырька записывается в виде:

$$r_s(\theta, t) = R(t) [1 + \Psi(\theta, t)]. \quad (5)$$

Функции $R(t)$ и $\Psi(\theta, t)$ будем называть, соответственно, радиусом и искажением сферической формы пузырька. Искажение сферической формы пузырька представляется как

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i(t) P_i(\eta), \quad (6)$$

где $P_i(\eta)$ — полиномы Лежандра; $\eta = \cos \theta$, $\varepsilon_i(t)$ — амплитуда искажения по i -ой сферической гармонике.

Потенциал скоростей Φ записывается следующим образом

$$\Phi = \frac{B_0(t)}{r} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i(t)}{r^{i+1}} P_i(\eta). \quad (7)$$

Дальнейшие соотношения получены из (1)–(4) в предположении, что

$$|\varepsilon_i^4| \ll 1. \quad (8)$$

Подставим выражения (5)–(7) в уравнения (3), (4) с учетом (1). Применяя при интегрировании полученной системы по координате θ процедуру метода Бубнова-Галеркина и учитывая (8), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $R(t)$, $B_0(t)$, $\varepsilon_i(t)$, $\delta_i = B_i(t)/R^i$. Для сокращения записи уравнений примем соглашение о суммировании: если слагаемое содержит два одинаковых индекса, по этим индексам предполагается суммирование. Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\dot{R} = \frac{1}{2} R^{-2} \left\{ -2B_0 + (-3B_0\varepsilon_i^2 + 2(i+1)\varepsilon_i\delta_i) \tilde{\alpha}_{ii} + 4B_0\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk} - \right. \\ \left. \underline{-(i+3)\delta_i\varepsilon_j\varepsilon_k \left[\frac{1}{2}(i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\beta}_{ijk} \right]} \right\}, \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_l = R^{-3} \left\{ 3B_0\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} - (l+1)\delta_l\tilde{\alpha}_{ll} + \delta_i\varepsilon_j \left[(i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijl} - \tilde{\beta}_{ijl} \right] - \right. \\ \left. - 3B_0\varepsilon_i\varepsilon_j \tilde{\alpha}_{ijl} - \underline{(i+1)\varepsilon_i\delta_i\tilde{\alpha}_{ii}\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} +} \right. \\ \left. + 4B_0\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijkl} - (i+3)\delta_i\varepsilon_j\varepsilon_k \left[\frac{1}{2}(i+1)(i+2)\tilde{\alpha}_{ijkl} - \tilde{\beta}_{ijkl} \right] \right\} / \tilde{\alpha}_{ll}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \left(2 + \varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} - \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk}\right) \dot{B}_0 + (i+1) \left[-\varepsilon_i \tilde{\alpha}_{ii} + \frac{1}{2}(i+2) \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk} \right] \dot{\delta}_i = \\
& = -R^{-3} \left\{ B_0^2 + \left(5B_0^2 \varepsilon_i^2 - 4(i+1)B_0 \delta_i \varepsilon_i + \frac{1}{2}(2i+1)(i+1) \delta_i^2 \right) \tilde{\alpha}_{ii} - \right. \\
& \quad \left. - 10B_0^2 \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk} + \frac{1}{2} B_0 (i+1) (7i+20) \delta_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \delta_i \delta_j \varepsilon_k (i+j+4) \left[(i+1)(j+1) \tilde{\alpha}_{ijk} + \tilde{\beta}_{ijk} \right] \right\} - \\
& \quad - \frac{R}{\rho_f} \left\{ 2(p^- - p_\infty) - 2\sigma(H, P_0) + (\tau_{nn}, P_0) \right\} + \frac{2\dot{B}_0}{a} R, \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-\varepsilon_l \tilde{\alpha}_{ll} + \varepsilon_i \varepsilon_j \tilde{\alpha}_{ijl} - \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijkl}) \dot{B}_0 + (i+1) [-\tilde{\alpha}_{ijl} + \\
& \quad + \frac{1}{2}(i+2) \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijkl}] \varepsilon_j \dot{\delta}_i + \tilde{\alpha}_{ll} \dot{\delta}_l = \\
& = -R^{-3} \left\{ B_0^2 (-2\varepsilon_l \tilde{\alpha}_{ll} + 5\varepsilon_i \varepsilon_j \tilde{\alpha}_{ijl} - 10\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijkl}) + \right. \\
& \quad + B_0 \delta_l \tilde{\alpha}_{ll} + \frac{1}{2} \delta_i \delta_j \left[(i+1)(j+1) \tilde{\alpha}_{ijl} + \tilde{\beta}_{ijl} \right] - 4B_0 (i+1) \delta_i \varepsilon_j \tilde{\alpha}_{ijl} + \\
& \quad + (i+1) \varepsilon_i \delta_i \tilde{\alpha}_{ii} l \delta_l \tilde{\alpha}_{ll} + \frac{1}{2} B_0 (i+1) (7i+20) \delta_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijkl} - \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \delta_i \delta_j \varepsilon_k (i+j+4) \left[(i+1)(j+1) \tilde{\alpha}_{ijkl} + \tilde{\beta}_{ijkl} \right] \right\} - \\
& \quad - \frac{R}{\rho_f} \left\{ -2\sigma(H, P_l) + (\tau_{nn}, P_l) \right\}, \tag{12}
\end{aligned}$$

где $(H, P_0) = \frac{1}{R} \left\{ 2 + (1 - i - i^2) \varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} + \frac{1}{2} (3i^2 + 3i - 2) \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \tilde{\alpha}_{ijk} \right\},$

$$\begin{aligned}
(H, P_l) = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{2} (l-1)(l+2) \varepsilon_l \tilde{\alpha}_{ll} + (1 - i - i^2) \varepsilon_i \varepsilon_j \tilde{\alpha}_{ijl} + \right. \\
\left. + \left[\frac{1}{2} (3i^2 + 3i - 2) \tilde{\alpha}_{ijkl} - \frac{1}{4} J_{ijkl} \right] \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tau_{nn}, P_0) = 2\mu R^{-3} \left\{ B_0 \left[4 + 3(4 - i(i+1)) \varepsilon_i^2 \tilde{\alpha}_{ii} + 5\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \left(3\tilde{\beta}_{ijk} - 4\tilde{\alpha}_{ijk} \right) \right] + \right. \\
+ (k-3)(k+1)(k+2) \varepsilon_k \delta_k \tilde{\alpha}_{kk} + \varepsilon_i \varepsilon_j \delta_k \left[\frac{1}{2} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \tilde{\alpha}_{ijk} - \right. \\
\left. \left. - (k+1)(2k+3) \tilde{\beta}_{ijk} - 2(k+2)(k+4) \tilde{\beta}_{jki} + \tilde{\chi}_{ijk} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\tau_{nn}, P_l) = 2\mu R^{-3} \{-6B_0\varepsilon_l\tilde{\alpha}_{ll} + (l+1)(l+2)\delta_l\tilde{\alpha}_{ll} + \\
& + \varepsilon_i\delta_k \left[-(k+1)(k+2)(k+3)\tilde{\alpha}_{ikl} + 2(k+2)\tilde{\beta}_{ikl} \right] + \\
& + 3B_0\varepsilon_i\varepsilon_j \left(4\tilde{\alpha}_{ijl} - \tilde{\beta}_{ijl} \right) + 5B_0\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \left(3\tilde{\beta}_{ijkl} - 4\tilde{\alpha}_{ijkl} \right) + \\
& + \varepsilon_i\varepsilon_j\delta_k \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\tilde{\alpha}_{ijkl} - (k+1)(2k+3)\tilde{\beta}_{ijkl} - \right. \\
& \left. \frac{-2(k+2)(k+4)\tilde{\beta}_{jkil} + \tilde{\chi}_{ijkl}}{2} \right], \\
\tilde{\alpha}_{ij} &= \int_{-1}^1 P_i P_j d\eta, \quad \tilde{\alpha}_{ijk} = \int_{-1}^1 P_i P_j P_k d\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijk} = \int_{-1}^1 P_i P_j P_k (1-\eta^2) d\eta, \\
\tilde{\alpha}_{ijkl} &= \int_{-1}^1 P_i P_j P_k P_l d\eta, \quad \tilde{\beta}_{ijkl} = \int_{-1}^1 P_i P_j P_k P_l (1-\eta^2) d\eta, \\
J_{ijkl} &= \int_{-1}^1 P_i P_j P_k P_l (1-\eta^2)^2 d\eta, \\
\tilde{\chi}_{ijk} &= \int_{-1}^1 P_i P_j P_k (1-\eta^2)\eta d\eta, \quad \tilde{\chi}_{ijkl} = \int_{-1}^1 P_i P_j P_k P_l (1-\eta^2)\eta d\eta.
\end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые имеют третий порядок малости относительно амплитуд искажения сферической формы поверхности пузырька. Последнее слагаемое в (11) приближенно учитывает сжимаемость жидкости [5], a — скорость звука в жидкости. Величину \ddot{B}_0 с принятой точностью можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned}
\ddot{B}_0 &= -B_0 R^{-3} \dot{B}_0 + \frac{3}{2} B_0^2 R^{-4} \dot{R} - (\rho_f)^{-1} \left[\dot{R}(p^- - p_\infty) + \right. \\
& \left. + R(\dot{p}^- - \dot{p}_\infty) + 4\mu R^{-3} (R\dot{B}_0 - 2B_0\dot{R}) \right], \tag{13}
\end{aligned}$$

Давление жидкости вдали от пузырька изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \tag{14}$$

где Δp — амплитуда; $\omega = 2\pi T$ — угловая частота; T — период.

Система (9), (12) с учетом (13) и начальными условиями

$$R(0) = R_0, \quad \varepsilon_i(0) = \varepsilon_{i0}, \quad B_0(0) = 0, \quad \delta_i(0) = 0 \tag{15}$$

решается методом Дормана-Принса седьмого порядка точности.

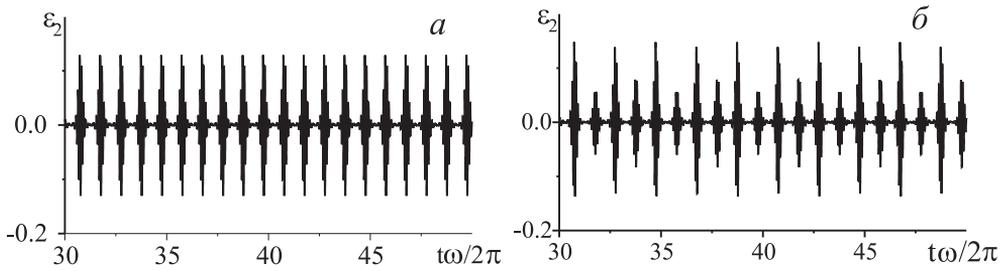


Рис. 1. Зависимости от времени амплитуды искажения ε_2 при $R_0 = 8.13$ мкм:
a — модель третьего порядка, *б* — модель второго порядка

3 Пример расчета

Расчет проведен для пузырька воздуха в воде при следующих данных: $\gamma = 1.4$, $b = (8.5)^{-3}$, $a = 1500$ м/с, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\sigma = 0.073$ кг/с², $\mu = 10^{-3}$ кг/мс, $p_0 = 0.1$ МПа, $\omega = 2\pi \cdot 26.5$ кГц, $\Delta p = 0.095$ МПа, $\varepsilon_2^0 = 10^{-5}$, $\varepsilon_i^0 = 0$, $i = 1; \overline{3.8}$. В (6), (7) бралось восемь членов ряда.

На Рис. 1 приведены зависимости $\varepsilon_2(t)$ при $R_0 = 8.13$ мкм, полученные с использованием моделей 3-го (Рис. 1(*a*)) и 2-го [2] (Рис. 1(*б*)) порядков. Для этого значения R_0 в зависимости от модели наблюдаются различные режимы колебаний: колебания с периодом, равным периоду изменения внешнего давления T — для модели третьего порядка и колебания с периодом $4T$ — для квадратичной модели. Для меньших значений R_0 результаты вычислений по обоим моделям практически совпадают.

4 Заключение

Разработана математическая модель несферических колебаний пузырька газа в жидкости, когда изменение формы поверхности пузырька представляется в виде ряда сферических гармоник. Соотношения записываются с точностью до третьего порядка малости по отношению к амплитудам искажения сферической формы пузырька, приближенно учтены вязкость и сжимаемость жидкости.

Список литературы

- [1] Ильгамов М. А., Насибуллаева Э. Ш. Нелинейный аналог уравнения Плессета для несферического движения газового пузырька // Труды ин-та механики УНЦ РАН. Уфа: «Гилем», 2003. Вып.3. С. 164–177.

- [2] Ильгамов М. А., Косолапова Л. А., Малахов В. Г. Нелинейные колебания пузырька газа в жидкости при осесимметричном возмущении его сферической формы // Модели механики сплошной среды. Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского, Т. 27. Казань: Казанск. матем. общество. 2004. С. 119–123.
- [3] Косолапова Л. А., Малахов В. Г. Уточненная модель нелинейных эллипсоидальных колебаний пузырька газа в жидкости // Актуальные проблемы механики сплошной среды (к 15-летию ИММ КазНЦ РАН). Казань: Казанск. гос. университет, 2006. С. 104–113.
- [4] Stephen J. Shaw. Translation and oscillation of a bubble under axisymmetric deformation // Phys. Fluids. 2006. V. 18, 072104.
- [5] Нигматуллин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К. О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // ДАН. 1996. Т.348, № 6. С. 768–771.