УДК 532.529.5

Моделирование локализованной стратификации дисперсной примеси в течениях с гидродинамическими особенностями[1]

Н. А. Лебедева

НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Аннотация. Рассматриваются задачи о возникновении мезомасштабных неоднородностей дисперсной примеси в течениях запыленного газа, содержащих гидродинамические особенности. В качестве примеров исследуются аэродисперсные течения вблизи критической точки при неортогональном столкновении вязких потоков; течение вблизи твердой стенки; течение с локализованной завихренностью; нестационарное течение со стационарной точкой.

Ключевые слова: дисперсный поток, критическая точка, завихренность, стационарная точка, стратификация, аккумуляция, гидродинамическая особенность, особенность концентрации

---

1 Введение

В последние годы в механике многофазных сред особый интерес представляют исследования мезомасштабных неоднородностей концентрации дисперсной фазы. Масштаб таких неоднородностей много больше размера дисперсного включения, но много меньше макромасштаба задачи. В работе рассматриваются связи между кинематическими особенностями гидродинамических полей несущей фазы и картинами распределения концентрации примеси. В качестве примеров исследуются двумерное течение вблизи критической точки в вязкой жидкости при неортогональном

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05–01–00502)

столкновении двух потоков и при натекании потока на твердую стенку; одномерное нестационарное течение вблизи стационарной точки; двумерное стационарное вихревое течение, описываемое известным решением Кельвина типа «кошачий глаз».

2 Течение вблизи критической точки

Рассматривается плоское стационарное течение вблизи критической точки, образующейся при соударении двух потоков с вязкостями μ_1 и μ_2 и плотностями ρ_1 и ρ_2, которые натекают под произвольными углами φ_1 и φ_2 и взаимодействуют по прямой линии (см. Рис. 1(a)). Первый поток содержит сферические дисперсные включения радиуса σ и массы m. Течение потоков вдали от критической точки выходит на течение идеальной жидкости вблизи произвольной вихревой критической точки, определяемое скоростью растекания C и удвоенным модулем завихренности B. Используя двухконтинуальную модель запыленного газа [1] с силой межфазного взаимодействия в форме закона Стокса, уравнения движения и неразрывности и граничные условия для обоих потоков несущей фазы и дисперсной фазы записываются в следующем безразмерном виде ($i = 1, 2$):

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot\mathbf{v_i}=0,\quad \nabla\cdot(\mathbf{v_s}n_s)=0,\\
(\mathbf{v_i}\cdot\nabla)\mathbf{v_i}=-\tfrac{1}{\rho^{(i-1)}}\nabla p_i+\left(\tfrac{\mu}{\rho}\right)^{(i-1)}\left(\nabla^2\mathbf{v_i}-\alpha\beta n_s(\mathbf{v_i}-\mathbf{v_s})\right),\\
(\mathbf{v_s}\cdot\nabla)\mathbf{v_s}=\beta\mu^{(i-1)}(\mathbf{v_i}-\mathbf{v_s}),\\
u_1(x,0)=u_2(x,0),\quad v_1(x,0)=v_2(x,0)=0,\\
y=0:\frac{\partial u_1}{\partial y}=\mu\frac{\partial u_2}{\partial y},\quad -p_1+2\frac{\partial v_1}{\partial y}=-p_2+2\mu\frac{\partial v_2}{\partial y},\\
y\to\infty:\quad u_1=x+\lambda y,\quad v_1=-y,\\
y\to-\infty:\quad u_2=\chi_1 x+\chi_2 y,\quad v_2=-\chi_1 y,\\
y=y_0:\quad u_s=x+\lambda y_0,\quad v_s=-y_0,\ \ n_s=1,\\
\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1},\quad \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1},\quad \alpha=\frac{mn_{s0}}{\rho_1},\quad \beta=\frac{6\pi\sigma\mu_1}{mC_1},\\
\lambda=\frac{B_1}{C_1},\quad \chi_1=\frac{C_2}{C_1},\quad \chi_2=\frac{B_2}{C_1}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $\mathbf{v_i}$ и p_i — скорости и давления потоков; $\mathbf{v_s}$ и n_s — скорость и числовая концентрация дисперсной фазы; C_i и B_i — скорость растекания и удвоенный модуль завихренности, связанные с углами φ_1 и φ_2 как $\operatorname{tg}\varphi_1 = 2/\lambda$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = -2\chi_1/\chi_2$; α и β — относительная массовая концентрация и параметр инерционности частиц. В качестве масштабов длины, скорости, давления и числовой концентрации частиц используются $(\mu_1/C_1\rho_1)^{1/2}$,

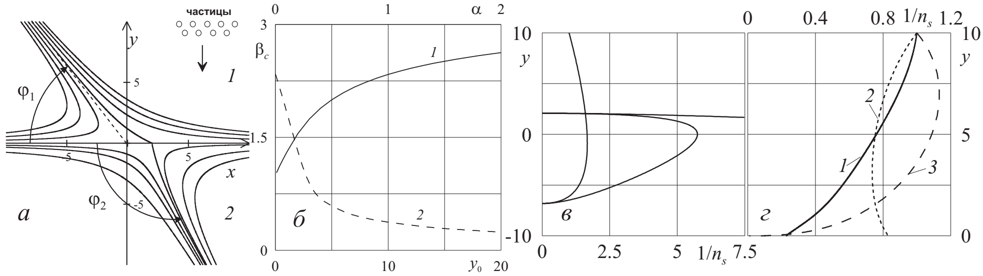

Рис. 1. а) Система координат и линии тока несущей фазы при $\rho = 1$, $\mu = 10$, $\lambda = 1.6$, $\chi_2 = 1.2$; б) Течение вблизи стенки: $\beta_c(y_0)$ при $\alpha = 0$ (1) и $\beta_c(\alpha)$ при $y_0 = 10$ (2); в) Значение $1/n_s$ для столкновения двух потоков при $\mu = 10$, $\rho = 1$, $\lambda = 1.6$, $\chi_2 = 1.2$, $\beta = 0.5$, $y_0 = 10$; г) Значение $1/n_s$ для течения вблизи стенки при $\lambda = 1.5$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $y_0 = 10$ (1) и $\lambda = 2$, $\alpha = 0.25$, $\beta = 1$, $y_0 = 10$ (2), при столкновении двух потоков для $\mu = 5$, $\rho = 1$, $\lambda = 3.66$, $\chi_2 = -7.32$, $\beta = 5$, $y_0 = 10$ (3)

$(\mu_1 C_1/\rho_1)^{1/2}$, $\mu_1 C_1$ и n_{s0} — концентрация дисперсной примеси вдали от критической точки соответственно. Граничные условия для фазы частиц ставятся на конечном расстоянии y_0 от линии раздела двух потоков.

При $\mu \to \infty$, что соответствует течению вязкого запыленного газа вблизи твердой стенки, решение ищется в автомодельном виде: $u(x, y) = G(y) + xF'(y)$, $v(x, y) = F(y)$, $u_s(x, y) = H(y) + xZ(y)$, $v_s(x, y) = Q(y)$, $n_s(x, y) = N(y)$. Это позволяет свести (1) к краевой задаче ОДУ девятого порядка, решение которой находится численно, итерациями по параметру α при фиксированном значении параметра β. В результате численных расчетов найдено два возможных режима течения: с наличием и без инерционного осаждения частиц на стенку. На Рис. 1(б) представлена рассчитанная зависимость критического значения параметра инерционности частиц β_c, разделяющего два возможных режима течения. При $\beta \geq \beta_c$ частицы движутся без осаждения, формируя вблизи стенки зону с высокой, но конечной числовой концентрацией частиц (Рис. 1(г), кривая 1). В случае достаточно инерционной дисперсной примеси при $\beta < \beta_c$ концентрация не сильно меняется при приближении к стенке (Рис. 1(г), кривая 2). Если в этом случае предположить, что частицы отражаются от стенки по зеркальному закону, то огибающей отраженных частиц является прямая линия, концентрация дисперсной фазы на которой стремится к бесконечности интегрируемым образом.

Для конечных значений μ задача решается при $\alpha \ll 1$. В этом случае параметры течения несущей фазы находятся отдельно от дисперсной фазы. Следуя [2], ищем решение в автомодельном виде: $u_i(x,y) = g_i(y) + xf_i'(y)$, $v_i(x,y) = -f_i(y)$. После подстановки в (1) получается краевая задача десятого порядка, которая при помощи специальной процедуры сводится к нескольким задачам Коши. При вычислении параметров дисперсной фазы используется полный лагранжев метод [3], позволяющий по известному полю скоростей несущей фазы вычислить все параметры дисперсной фазы, включая числовую концентрацию, вдоль траекторий движения дисперсных включений. Найдены два возможных режима течения: течение без проникновения частиц во второй поток и течение с проникновением частиц. В первом случае частицы осциллируют около линии раздела с уменьшающейся амплитудой проникновения. Огибающими траекторий частиц являются прямые линии, параллельные линии раздела. Числовая концентрация на этих прямых стремится к бесконечности (Рис. 1(в)). Во втором случае частицы скапливаются возле линии раздела, не пересекая ее, и формируют при этом линию с бесконечной числовой концентрацией (Рис. 1(г), кривая 3). Все данные особенности интегрируемы.

Значение параметра инерционности β_c, разделяющее два режима, найдено как функция $\xi(\mu,\rho)$. Значения $\xi(\mu,\rho)$ приведены в Табл. 1. При $\beta < 4\xi(\mu,\rho)$ частицы проникают во второй поток.

Таблица 1

ρ	0.1	0.5	1.0	5.0	ρ	0.1	0.5	1.0	5.0
$\mu = 0.1$	1.278	1.083	1.000	0.800	$\mu = 1.0$	1.671	1.182	1.000	0.648
$\mu = 0.5$	1.527	1.148	1.000	0.693	$\mu = 5.0$	2.069	1.264	1.000	0.561

3 Течение вблизи стационарной точки

Исследуется одномерное нестационарное течение запыленного газа вблизи стационарной точки. Поле скоростей несущей фазы в размерном виде вблизи такой точки представлено в следующей размерной форме, периодической по времени: $u^*(x^*,t^*) = Ax^*\sin(\Omega t^*)$. Обезразмеренные уравнения движения и неразрывности для частиц имеют вид:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial(n_s u_s)}{\partial x} = 0, \ \mathrm{St}\frac{du_s}{dt} = (x\sin(\omega t) - u_s), \ \mathrm{St} = \frac{mA}{6\pi\sigma\mu}, \ \omega = \frac{\Omega}{A}. \quad (2)$$

Здесь ω и St — безразмерная частота и число Стокса. В качестве масштабов длины, скорости, времени и числовой концентрации использованы L, LA, A^{-1} и n_{s0} соответственно. Для решения (2) также использовался полный лагранжев метод. В начальный момент предполагалось, что частицы не

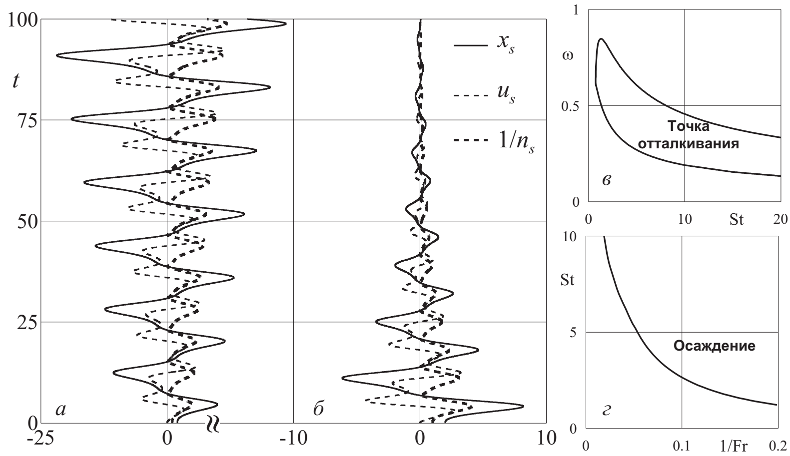

Рис. 2. Траектории, скорости и числовая концентрация дисперсной примеси вдоль траектории при $\mathrm{St} = 1.0$: для $\omega = 0.8$ (а) и $\omega = 0.9$ (б). Границы режимов: для течения вблизи стационарной точки (в), для течения с локализованной завихренностью при $d_1 = 2$, $T_{\max} = 100$ (г).

имеют скоростного отставания от несущей фазы, и концентрация является постоянной величиной.

На основе численных решений выявлено два качественно различных типа поведения дисперсной фазы, когда стационарная точка является точкой отталкивания (Рис. 2(а)) и точкой притяжения (Рис. 2(б)). В первом случае амплитуда колебания частицы увеличивается с течением времени и при каждом приближении к стационарной точке числовая концентрация возрастает до бесконечности. Во втором случае траектории частицы с течением времени все меньше отходят от стационарной точки и числовая концентрация также возрастает до бесконечности в стационарной точке. Режим течения, время пересечения частицей стационарной точки и числовая концентрация не зависят от начального значения координаты частицы. На Рис. 2(в) изображена граница раздела двух режимов. Вычислено $\mathrm{St}_{\min} = 0.7487$, меньше которого стационарная точка является точкой притяжения для любого значения ω.

4 Течение с локализованной завихренностью

Рассматривается задача о гравитационном осаждении облака дисперсной примеси на фоне несущей фазы, поле скоростей которой имеет вид стационарного вихревого течения Кельвина типа «кошачий глаз» [4] с функцией тока $\psi = \ln(d_1 \cos(x) + d_2 \operatorname{ch}(y))$, $d_2 = \sqrt{d_1^2 - 1}$ (Рис. 3(а)). Уравнения дви-

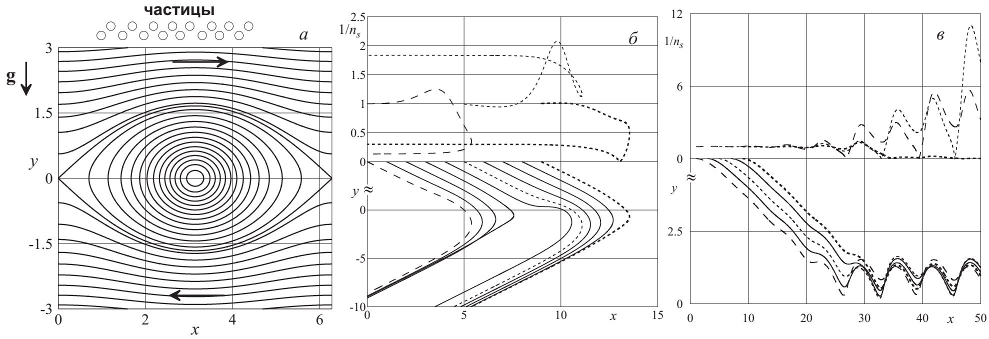

Рис. 3. Система координат и линии тока несущей фазы при $d_1 = 2$ (а). Траектории и концентрация частиц вдоль траекторий при $d_1 = 2$ для $\mathrm{Fr} = 1$, $\mathrm{St} = 1$ (б) и $\mathrm{Fr} = 10$, $\mathrm{St} = 2$ (в).

жения и неразрывности для частиц в безразмерной форме имеют вид:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v_s} n_s) = 0, \quad (\mathbf{v_s} \cdot \nabla)\mathbf{v_s} = \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v_s})}{\mathrm{St}} - \frac{1}{\mathrm{Fr}}\mathbf{j}.$$

Задача зависит от трех безразмерных параметров: d_1, числа Стокса St и числа Фруда Fr. По известному полю скоростей несущей фазы параметры дисперсной фазы, как и ранее, находятся с использованием полного лагранжева метода. В качестве граничных условий для облака частиц предполагаются равенство скоростей фаз и постоянство концентрации вдали от вихрей. На Рис. 3(а),(б) изображены траектории и распределения концентраций вдоль траекторий для двух характерных режимов течения: когда частицы оседают за время $t < T_{\max}$ и когда частицы не оседают за это время. В первом случае в некоторых точках траекторий концентрация дисперсной примеси может возрастать до бесконечности. Здесь наличие вихрей в течении ведет к возникновению зон пересекающихся траекторий частиц. В таких зонах концентрация частиц складывается из значений, рассчитанных вдоль каждой из пересекающихся траекторий. Во втором случае частицы собираются в тонкие зоны вблизи границы вихрей, где концентрация также может обращаться в бесконечность. Граница раздела двух режимов показана на Рис. 2(г). Для обоих режимов наличие вихрей в течении несущей фазы является причиной существенного перераспределения примеси, первоначально равномерно распределенной вдали от вихрей. Учет инерционности частиц в вихревом течении приводит к тому, что возникают зоны свободные от дисперсной примеси (внутри вихрей) и зоны с повышенной концентрацией примеси (на границах вихрей).

5 Заключение

Исследованы примеры течений запыленного газа с гидродинамическими особенностями несущей фазы, приводящими к появлению значительных неоднородностей концентрации дисперсной примеси. На основании численных расчетов исследованы возможные режимы течения и условия формирования локализованных зон накопления инерционных частиц.

Список литературы

[1] Marble F. E. Dynamics of dusty gases // Annu Rev. Fluid. Mech. 1970. V. 2. Pp. 397–446.

[2] Tilley B. S., Weidman P. D. Oblique two-fluid stagnation-point flow // Eur. J. Mech. B. Fluids. 1998. V. 17, № 2. Pp. 205–217.

[3] Osiptsov A. N. Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // Astrophys. Space Sci. 2000. V. 274, № 1–2. Pp. 377–386.

[4] Stuart J. T. On finite amplitude oscillation in laminar mixing layer // J. Fluid Mech. V. 29. Pp. 417–440.