УДК 532.59

Нелинейные дисперсионные гиперболические модели сплошных сред[1]

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Аннотация. В приближении длинных волн рассматриваются неравновесные течения неоднородной жидкости в каналах и трубах. Выводятся нелинейные дисперсионные гиперболические модели течения, позволяющие учесть влияние внутренней инерции при относительном движении фаз на структуру нелинейных волновых фронтов. На примере классических уравнений Буссинеска дан асимптотический вывод дисперсионных гиперболических моделей. Показано, что гиперболическая аппроксимация уравнений имеет тот же порядок точности, что и исходная модель.

Ключевые слова: каналовое приближение, уравнения мелкой воды, нелинейная дисперсия, гиперболические модели

---

1 Введение

Для описания нелинейных дисперсионных волн в каналовом приближении используется следующая система уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(\rho S)_t + (\rho S u)_x = 0,\\
&u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь S — площадь сечения канала, занятого жидкостью; ρ — плотность среды; u — средняя скорость. Давление является функцией плотности и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07–01–00609) и интеграционного проекта СО РАН № 2.15

ее материальных производных

$$P = P(\rho, d\rho/dt, d^2\rho/dt^2), \tag{2}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$.

К рассматриваемому классу относятся уравнения Иорданского-Когарко для пузырьковой жидкости, уравнения Грина-Нагди и др. Эти уравнения применяются для описания течений пузырьковой жидкости в соплах Лаваля, для исследования течения однородной жидкости со свободной поверхностью в каналах переменного сечения. Если в рассматриваемом процессе скорость жидкости мала по сравнению со скоростью распространения волновых возмущений, то в представлении давления (2) используются частные производные по времени. В этом случае уравнения (1), (2) представляют целый класс различных приближений Буссинеска в теории мелкой воды, неравновесных течений газожидкостных сред в неоднородных каналах и так далее.

При численной реализации нестационарных течений в рамках модели (1) возникают проблемы постановки граничных условий, связанные с негиперболичностью рассматриваемой системы. Частично эти проблемы устраняются при построении гиперболической аппроксимации (1). В [1] для второго приближения мелкой воды построены нелинейные дисперсионные гиперболические системы уравнений. Уравнения получаются дополнительным осреднением исходных уравнений и введением новых «внутренних» переменных. Параметр осреднения входит явно в построенную модель. При этом полное давление в (1) зависит от осредненного значения плотности ρ и от производных «мгновенных» значений плотности $\widetilde{\rho}$ следующим образом:

$$P = P(\rho, d\widetilde{\rho}/dt, d^2\widetilde{\rho}/dt^2).$$

В качестве замыкающего соотношения используется соотношение между осреднёнными и мгновенными величинами (1)–(2):

$$\frac{d^2\widetilde{\rho}}{dt^2} = \alpha(\rho - \widetilde{\rho}).$$

Окончательно система уравнений принимает вид:

$$\begin{gathered}
(\rho S)_t + (\rho S u)_x = 0,\\
u_t + u u_x + \frac{1}{\rho}\bar{P}_x = 0,\\
\widetilde{\rho}_t + u\widetilde{\rho}_x = v,\\
v_t + u v_x = \gamma(\rho - \widetilde{\rho}),
\end{gathered} \tag{3}$$

где $\bar{P} = \bar{P}(\rho, \widetilde{\rho}, v) = P(\rho, v, \gamma(\rho - \widetilde{\rho}))$.

2 Гиперболическая аппроксимация уравнений Грина-Нагди

В качестве примера системы (1) приведём уравнения Грина-Нагди, описывающие эволюцию длинных волн в открытом канале ($S \equiv \mathrm{const}$). В качестве переменной ρ фигурирует глубина потока h, u — скорость потока, а полное давление представляется в виде [2]:

$$P = \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}h^2\frac{d^2h}{dt^2},$$

где g — ускорение свободного падения. Гиперболическая аппроксимация уравнений Грина-Нагди методом, описанным в предыдущем разделе, приводит к следующей системе законов сохранения газодинамического типа:

$$\begin{gathered}
h_t + (hu)_x = 0,\\
(hu)_t + (hu^2 + \bar{P})_x = 0,\\
\left(h\left(\frac{1}{2}u^2 + \bar{\varepsilon}\right)\right)_t + \left(hu\left(\frac{1}{2}u^2 + \bar{\varepsilon}\right) + \bar{P}u\right)_x = 0,\\
\tilde{h}_t + u\tilde{h}_x = v,\\
\bar{P} = \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}\gamma h^2(h - \tilde{h}), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}gh + \frac{1}{6}\gamma(h - \tilde{h}) + \frac{1}{6}v^2.
\end{gathered}$$

Здесь $\tilde{h}$ — мгновенная глубина. Заметим, что дифференциальным следствием этой системы является уравнение

$$v_t + uv_x = \gamma(h - \tilde{h}).$$

Поэтому характеристики системы

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{\left(g + \gamma\left(h - \frac{2}{3}\tilde{h}\right)\right)}, \quad \frac{dx}{dt} = u \,(\text{кратная характеристика})$$

вещественны при $|h - \tilde{h}| \ll h$.

Для широкого класса сред система (3) является неоднородной гиперболической системой, описывающей распространение волн, присущих нелинейным диспергирующим средам, в частности, распространение солитонов. Тем не менее, гиперболический тип уравнений (3) позволяет также рассмотреть разрывные решения, среди которых следует отметить решения типа «прыжок–волна», состоящие из движущегося разрыва и следующего за ним периодического волнового пакета.

3 Гиперболические уравнения Буссинеска

В этом разделе выводится гиперболическая аппроксимация второго приближения теории мелкой воды на примере простейшего варианта уравнений Буссинеска. Процедура осреднения явно содержит параметр, связанный с выбором масштаба осреднения. Будет показано, что полученная система имеет тот же порядок аппроксимации длинных волн, что и исходная система.

Рассмотрим уравнения Буссинеска ([3], гл.13):

$$\begin{aligned} &\eta_t + ((1+\alpha\eta)u)_x + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0, \\ &u_t + \alpha u u_x + \eta_x + \frac{1}{3}\beta\eta_{ttx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $h = h_0(1+\alpha\eta)$ — глубина, а u — средняя скорость слоя жидкости. Безразмерные переменные выбраны так, что ускорение силы тяжести $g = 1$ и характерная глубина $h_0 = 1$. Параметры $\alpha = a/h_0$, где a — амплитуда волны, и $\beta = h_0^2/l^2$, где l — горизонтальный масштаб течения, считаются малыми. Пусть τ — фиксированный масштаб времени ($\tau^2 \approx \beta$). Для произвольной функции $f = f(t,x)$ обозначим

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} f(s,x)\,ds.$$

Формула Тейлора дает следующее представление функции f в окрестности точки t (x — фиксировано):

$$\begin{aligned} f(s) = f(t) + f'(t)(s-t) + \frac{1}{2}f''(t)(s-t)^2 + \frac{1}{6}f'''(t)(s-t)^3 + \\ + \frac{1}{24}f^{(IV)}(t)(s-t)^4 + O((s-t)^5). \end{aligned} \tag{5}$$

После осреднения получаем

$$\bar{f} = f(t) + \frac{1}{6}f''(t)\tau^2 + O(\tau^4)\,. \tag{6}$$

Из (5)–(6) следует

$$\begin{aligned} \overline{(f_x)} &= (\bar{f})_x, \\ \overline{(f_t)} &= \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{2\tau} = \\ f'(t) + \frac{1}{6}f'''(t)\tau^2 &+ O(\tau^4) = (\bar{f})_t + O(\tau^4). \end{aligned} \tag{7}$$

Кроме того, заметим

$$\bar\eta\bar u = \left(\eta(t) + O(\tau^2)\right)\left(u(t) + O(\tau^2)\right) = \eta(t)u(t) + O(\tau^2),$$

$$\overline{\eta u} = \frac{1}{2\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left(\eta(t) + \eta'(t)s + O(s^2)\right)\times \\ \times\left(u(t) + u'(t)s + O(s^2)\right)\,ds = \eta(t)u(t) + O(\tau^2). \tag{8}$$

то есть $\overline{\eta u} = \bar\eta\bar u + O(\tau^2)$.

Аналогично,

$$\overline{u^2} = (u(t))^2 + O(\tau^2) = (\bar u)^2 + O(\tau^2). \tag{9}$$

Ввиду (7)–(9), после осреднения, уравнения (4) принимают вид:

$$\begin{gathered}\bar\eta_t + \bar u_x + \alpha(\bar\eta\bar u)_x + O(\alpha\beta, \beta^2, \alpha\tau^2, \tau^4) = 0,\\ \bar u_t + \left(\frac{\alpha}{2}\bar u^2 + \bar\eta\right)_x + \frac{\beta}{3}\overline{(\eta_{ttx})} + O(\alpha\beta, \beta^2, \alpha\tau^2, \tau^4) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

При этом последний член в уравнении (10) представляется в виде:

$$\overline{(\eta_{tt})} = \frac{1}{2\tau}\int\limits_{-\tau}^{\tau}(\eta_{tt}(t) + \eta_{ttt}(t)s + \\ + \eta_{tttt}(t)s^2 + O(s^3))\,ds = \eta_{tt}(t) + O(\tau^2). \tag{11}$$

С другой стороны, из (6) следует

$$\eta_{tt}(t) = \frac{6}{\tau^2} = (\bar\eta - \eta(t)) + O(\tau^2). \tag{12}$$

Уравнения (10) принимают вид:

$$\begin{gathered}\bar\eta_t + ((1+\alpha\bar\eta)\bar u)_x + O(\alpha\beta, \beta^2, \alpha\tau^2, \tau^4) = 0,\\ \bar u_t + \alpha\overline{u}\overline{u}_x + \bar\eta_x + \frac{1}{3}\beta\eta_{ttx} + O(\alpha\beta, \beta^2, \alpha\tau^2, \tau^4) = 0,\\ \eta_{tt} = \gamma(\bar\eta - \eta) + O(\tau^2).\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\gamma = 6/\tau^2 = \mu/\beta$. Осталось заметить, что член, содержащий старшие производные входит в (4) с малым коэффициентом β. Поэтому следующая система имеет тот же порядок аппроксимации, что и исходная система (4):

$$\begin{gathered}\bar\eta_t + ((1+\alpha\bar\eta)\bar u)_x + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0,\\ \bar u_t + \alpha\overline{u}\overline{u}_x + \frac{\mu}{3}(\bar\eta - \eta)_x + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0,\\ \eta_{tt} = \gamma(\bar\eta - \eta) + O(\beta).\end{gathered} \tag{14}$$

Отбрасывая в (14) члены более высокого порядка, приходим к гиперболической системе ($\bar{h} = 1 + \bar{\eta}, h = 1 + \eta, \alpha = 1$):

$$\begin{gathered}\bar{h}_t + (\bar{h}\bar{u})_x = 0,\\ \bar{u}_t + \overline{u u}_x + \bar{h}_x + \frac{\mu}{3}(\bar{h} - h)_x = 0,\\ h_t = \nu,\\ \nu_t = \frac{\mu}{\beta}(\bar{h} - h).\end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что в (15) $\mu = O(1)$.

4 Заключение

Гиперболическая аппроксимация (3) исходных уравнений (1) получена формально. В разделе 3 представлен асимптотический вывод гиперболического аналога уравнений Буссинеска, из которого становится понятной связь параметра γ с выбранным масштабом осреднения. Более того, показано, что гиперболическая модель имеет тот же порядок аппроксимации, что и исходные уравнения Буссинеска. Это означает, что построенные нелинейные дисперсионные гиперболические системы не только представляют собой приближение моделей более высокого порядка, но и являются самостоятельными моделями движения среды, адекватно описывающими структуру нелинейных волн в диспергирующих средах.

Список литературы

[1] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: ИСО РАН, 2000. 420 с.

[2] Green A. E., Naghdi P. M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // JFM. 1976. V. 78. Pp. 237–246.

[3] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 620 с.