УДК 532.529

Гравитационная конвекция суспензий и аэрозолей в закрытом сосуде[1]

Ю. А. Невский

НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Аннотация. В рамках модели взаимопроникающих континуумов рассмотрена задача о гравитационной конвекции разреженной суспензии в закрытом двумерном сосуде. На примере задачи о гравитационном оседании (всплытии) тяжелой (легкой) сферической частицы в гармоническом поле скорости вязкой несущей фазы исследовано влияние нестационарных и «наследственных» сил на характер движения частицы. Создана гидродинамическая модель гравитационной конвекции суспензий и аэрозолей, учитывающая нестационарные силы в межфазном обмене импульсом. Определен диапазон параметров, в котором описание мезомасштабных движений в оседающей (всплывающей) суспензии невозможно без учета нестационарных и наследственных сил.

Ключевые слова: межфазное взаимодействие, двухфазная среда, частицы, сила Стокса, сила Бассе-Буссинеска, сила присоединенных масс

1 Введение

При исследовании задач гравитационной конвекции суспензии в рамках двухконтинуальной модели особое внимание уделяется моделированию мезомасштабных течений, вызванных неустойчивым ростом неоднородностей концентрации дисперсной фазы [1]. При этом в межфазном обмене импульсом, как правило, учитывается лишь стационарная сила сопротивления (сила Стокса) [2]. В данной работе предложена модель, учитывающая все нестационарные силы, действующие на частицу, а также произве-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05–01–00502)

дена оценка необходимости их учета в зависимости от отношения плотностей вещества фаз.

2 Постановка задачи о гравитационной конвекции в закрытом двумерном сосуде

Для монодисперсной среды с нулевым тензором давлений и малой объемной долей при условии малости числа Рейнольдса, посчитанного по скорости движения частицы относительно несущей фазы, сила межфазного взаимодействия определяется из решения задачи об обтекании сферы неоднородным потоком вязкой жидкости. При движении твердой сферы в присутствии силы тяжести при малых числах Рейнольдса в условиях, когда пространственные масштабы изменения поля скорости жидкости много больше размера частицы, суммарная сила, действующая на частицу, представима в виде [3, 4]:

$$\mathbf{f}_{sum} = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{BB} + m\mathbf{g},$$

$$\mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s), \quad \mathbf{f}_A = \rho\tau_s\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g}\right), \quad \mathbf{f}_m = \frac{\rho\tau_s}{2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right),$$

$$\mathbf{f}_{BB} = 6\sigma^2\sqrt{\pi\rho\mu}\int_0^t \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)|_{t=t_1} \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}.$$

Здесь d/dt и D/Dt обозначают, соответственно, дифференцирование вдоль траектории частицы и жидкой частицы несущей фазы, совпадающей в данный момент с центром частицы (в рассматриваемом ниже случае различие между этими производными не существенно); $\mathbf{f}_{St}$, $\mathbf{f}_A$, $\mathbf{f}_m$, $\mathbf{f}_{BB}$ — силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс и Бассе-Буссинеска соответственно; m, σ, ρ_s, τ_s — масса, радиус, плотность и объем частицы; μ и ρ — вязкость и плотность несущей фазы; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, остальные обозначения общепринятые.

В качестве масштаба скорости при обезразмеривании удобно взять скорость стационарного оседания частицы в малоплотной вязкой среде $U = mg/6\pi\sigma\mu$, масштаб длины задается характерным размером сосуда L, масштаб времени: $\tau = L/U$. Например, для полумиллиметровых частиц, находящихся в воде и в два раза превышающих по плотности несущую фазу, $U \sim 1$ м/с, а длина скоростной релаксации частиц $l_\tau = mU/6\pi\sigma\mu \sim 0.1$ м.

В безразмерном виде система уравнений двухконтинуальной модели дисперсной смеси принимает вид:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \quad \frac{dn_s}{dt}+n_s\operatorname{div}(\mathbf{v}_s)=0, \quad \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}=\mathbf{f}_s-\beta\mathbf{j},\\
\mathbf{f}_s=\beta\left((\mathbf{v}-\mathbf{v}_s)+\chi\int_0^t\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)|_{t=t_1}\frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}\right)+\\
+\frac{\eta}{2}\left(3\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)+\eta\beta\mathbf{j},\\
\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p+\frac{\triangle\mathbf{v}}{\mathrm{Re}}-\alpha n_s\mathbf{f}_s.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $\beta=L/l_\tau$, $\eta=\rho/\rho_s$ и $\chi=\sqrt{9\eta/2\pi\beta}$. Под давлением понимается разность истинного и гидростатического давлений. Начальные и граничные условия таковы:

$$
n_s|_{t=0}=n_s(x,y), \quad \mathbf{v}|_{t=0}=\mathbf{v}_s|_{t=0}=0, \quad \mathbf{v}|_D=0. \tag{2}
$$

Здесь D — граница области; n_s — числовая концентрация частиц; $\alpha=mn_{s0}/\rho$ — массовая доля частиц; Re$=LU\rho/\mu$ — число Рейнольдса, а $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный против силы тяжести. Здесь использовано, что квадрат числа Фруда $\mathrm{Fr}^2=U^2/(gL)=\beta^{-1}$.

Безразмерные параметры данной системы могут изменяться в широких пределах: $0<\beta$, Re, $\eta<\infty$, $\alpha\le O(1)$.

3 Оценка роли нестационарных составляющих силы межфазного взаимодействия

Для оценки влияния нестационарных и «наследственных» сил на скорость осаждения дисперсной фазы рассматривалась модельная задача о движении частицы под действием силы гравитации в осциллирующем с частотой ω_1 потоке вязкой жидкости, скорость которого $v=\cos(\omega_1 t)$. При этом сравнивалось решение полной системы уравнений движения частицы с решениями, полученными в случаях, когда из силы межфазного взаимодействия исключались: а) сила Бассе-Буссинеска, б) сила присоединенных масс и в) обе указанные силы. После обезразмеривания (характерная скорость прежняя, характерная длина $L=l_\tau$, то есть $\beta=1$) полная система уравнений движения частицы в лагранжевой форме [5] принимает вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\mathbf{r}_s}{dt}=\mathbf{v}_s,\\
\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}=\lambda(\mathbf{v}-\mathbf{v}_s)+\frac{3\eta\lambda}{2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\lambda\sqrt{\frac{9\eta}{2\pi}}\int_0^t\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)|_{t=t_1}\frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}+\\
+\lambda(1-\eta)\mathbf{j}, \quad \lambda=2/(2+\eta).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

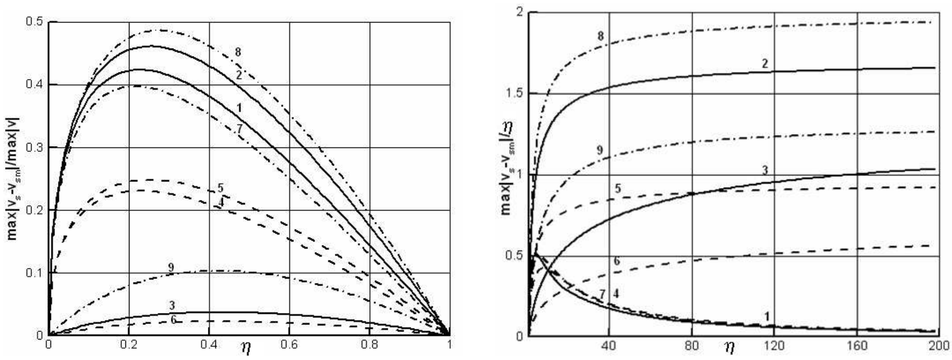

Рис. 1. Характеристики влияния нестационарных и(или) «наследственных» сил в зависимости от отношения плотностей фаз η при частоте $\omega_1 = 1$ (сплошная линия), $\omega_1 = 0.1$ (штриховая линия) и $\omega_1 = 10$ (штрих-пунктир). Кривые 1, 4, 7 показывают влияние силы Бассе-Буссинеска, 2, 5, 8 — суммарное влияние нестационарных и наследственных сил, а 3, 6, 9 — влияние силы присоединенных масс

Начальные условия задаются соотношениями: $\mathbf{v}_s(0) = \mathbf{v}(0) = 1$, $\mathbf{r}_s(0) = 0$.

Для количественной оценки «влияния» сил на решение отслеживалось отношение максимума модуля разности скоростей, полученных из решений полной системы уравнений и системы без нестационарных (силы присоединенных масс) и(или) «наследственных» (силы Бассе-Буссинеска) сил, к максимуму скорости несущей фазы (для тяжелых частиц ($\eta \leq 1$)) и к отношению плотностей η (для легких частиц ($\eta \geq 1$)). Такой выбор относительного параметра, определяющего влияние тех или иных сил, в случае легких частиц обусловлен асимптотикой решения полной системы уравнений движения частицы при $t \to \infty$. Вклад нестационарных и «наследственных» сил проиллюстрирован на Рис. 1.

4 Примеры гравитационной конвекции суспензии в вертикальном двумерном сосуде

В качестве примера рассмотрим предельный случай гравитационной конвекции малоинерционных частиц $\beta \to \infty$ при малой массовой концентрации дисперсной фазы ($\alpha \to 0$) и малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \to 0$. При этом предполагается, что произведение $\alpha\beta\mathrm{Re}$ остается конечным. В этой предельной ситуации в межфазном взаимодействии можно оставить лишь силу Стокса и ввести новые «растянутые» переменные $p_1 = \mathrm{Re} \cdot p$, $t_1 = t/\mathrm{Re}$. После перехода к соответствующим пределам упрощенная си-

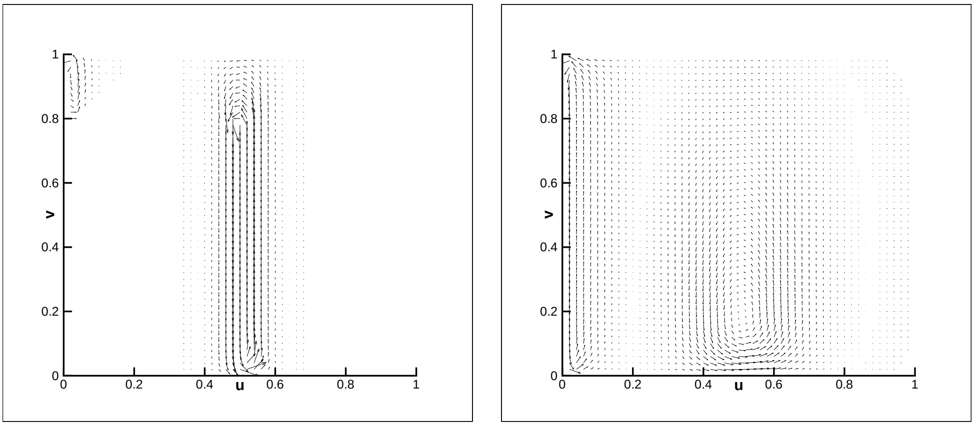

Рис. 2. Мгновенные поля скоростей несущей фазы при гравитационной конвекции суспензии, в начальный момент имевшей однородную концентрацию и заполнявшей левую половину двумерного объема, при $\eta = 0.01$ и $\alpha\beta$Re$=500$ для двух значений безразмерного времени: $t_1 = 0.001$ и $t_1 = 0.007$

стема уравнений принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_1} = -\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v} - \alpha\beta\mathrm{Re}\cdot n_s\mathbf{j}, \quad \mathbf{v_s} = \mathbf{v} - (1-\eta)\mathbf{j},$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{dn_s}{dt_1} = 0.$$

Эту систему удобнее всего решать, перейдя к переменным $\psi : u = \partial\psi/\partial y$, $-\partial\psi/\partial x$ и $\mathbf{k}\omega = \mathrm{rot}(\mathbf{v})$. В новых переменных имеем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \triangle\omega - \alpha\beta\mathrm{Re}\frac{\partial n_s}{\partial x}, \quad \triangle\psi = -\omega.$$

Начальные условия имеют вид (2).

Так как переход к новым переменным дал повышение порядка системы, то необходимо и дополнительное граничное условие для ω. Это условие получается приближенно из разложения ψ в ряд Тейлора в окрестности границы области: $\psi(x_j,\varepsilon) = \psi(x_j,0) + \varepsilon\cdot\partial\psi/\partial x_i(x_j,0) + \varepsilon^2/2\cdot\partial^2\psi/\partial x_i^2(x_j,0) + o(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$. Здесь $x_{i,j}$ — пространственные координаты. Используя то, что $\psi(x_j,0) = \partial\psi/\partial x_i(x_j,0) = 0$, а $\partial^2\psi/\partial x_i^2(x_j,0) = \omega(x_j,0)$, легко получить граничное условие для ω:

$$\omega(x_j,0) = 2\psi(x_j,\varepsilon)/\varepsilon^2 + o(\varepsilon)$$

Это условие замыкает постановку задачи в переменных ψ, ω. Примеры ее решения представлены на Рис. 2.

5 Заключение

Исследовано влияние нестационарных и «наследственных» сил в межфазном обмене импульсом в зависимости от отношения плотностей фаз. Показано, что учет нестационарных сил важен только в случае легких частиц $\eta > 1$, а в случае тяжелых частиц ими можно пренебречь. Получено, что «наследственные» силы важны в пределах отношения плотностей вещества фаз $0.01 < \eta < 100$.

Создана модель гравитационной конвекции суспензии в замкнутых двумерных объемах. Приведен пример численного расчета гравитационной конвекции в случае малоинерционных частиц.

Список литературы

[1] Asmolov E. S. Evolution of fluctuations in a suspension sedimenting in a container bounded by horizontal walls // Phys. Fluids. 2004. V. 16, №. 8. Pp. 3086–3094.

[2] McCaffery S. J., Elliott L. Ingham D. B. Enhanced Sedimentation in Inclined Fracture Channels // Southampton: Comput. Mech. Publ. 262 p.

[3] Maxey M. R., Riley J. J. Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow // Phys. of Fluids. 1983. V. 26. Pp. 883–891.

[4] Mchaelides E. E., Hydrodynamic force and heat/mass transfer from particals, bubbles, and drops — the Freeman scholar lecture // J. Fluids Eng. 2003. V. 125. Pp. 209–238.

[5] Osiptsov A. N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274. Pp. 377–386.