

УДК 533.2, 534.1

# ДИНАМИКА ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В КЛАСТЕРЕ В СИЛЬНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*А. С. Топольников, С. И. Коновалова*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Теоретически исследуется радиальное и трансляционное движение сферических паровых пузырьков в кластере под действием ультразвукового поля большой амплитуды (порядка 10 атмосфер). При математическом описании задачи применяется дискретная модель, согласно которой динамика каждого пузырька в кластере рассматривается в отдельности, а взаимодействие между пузырьками осуществляется посредством вторичных сил Бьеркнеса. Изучается возможность усиления радиальных пульсаций пузырьков за счет их совместного движения. Исследуется процесс структурообразования пузырьков в кластере и устойчивость (позиционная и радиальная) колебаний.

**Ключевые слова:** акустическая кавитация, сонолюминесценция, массообмен

---

## 1 Введение

Динамика паровых пузырьков при акустической кавитации существенно отличается от поведения газовых пузырьков. В первую очередь это связано с тем, что на поверхности паровых пузырьков происходит интенсивный массообмен, который сказывается на значении текущего радиуса. После возникновения парового пузырька в пучности акустической волны в зависимости от выбора начальных параметров наблюдаются два типа движения: схлопывание пузырька спустя несколько периодов колебаний и асимптотический рост до некоторого равновесного радиуса [1, 2].

В связи с открытием в последние годы эффекта нейтронной эмиссии при кавитации в дейтерийсодержащих средах [3] представляет интерес теоретическое исследование процесса радиальных колебаний паровых пузырьков в сильном акустическом поле (порядка 10 атмосфер). Большая амплитуда внешнего воздействия может способствовать развитию нелинейных осцилляций пузырьков, сопровождающихся сильными сжатиями. Другим важным моментом является описание динамики кластера, состоящего из паровых пузырьков, исследование их взаимодействия с точки зрения усиления радиальных пульсаций пузырьков.

В настоящей работе представлены математическая модель и результаты численных расчетов движения кластера паровых пузырьков в поле стоячей акустической волны большой амплитуды. Проведены исследования радиального и поступательного движения пузырьков, выявлены основные типы взаимодействия между ними.

## 2 Математическая модель

Для описания совместного радиального и трансляционного движения паровых пузырьков в кластере используется математическая модель, основанная на следующих приближениях:

- пузырьки имеют сферическую форму;
- расстояния между пузырьками значительно больше их размеров;
- отсутствуют процессы дробления, коагуляции и образования новых пузырьков;
- давление и температура пара в пузырьках считаются однородными;
- жидкость является несжимаемой;
- массообмен происходит на границе пузырек–жидкость и считается равновесным.

Рассмотрим совместную динамику  $N$  паровых пузырьков внутри сферической колбы, заполненной жидкостью, в поле стоячей акустической волны амплитуды  $\Delta p$  и частоты  $\omega$  (см. Рис. 1).

Радиальное движение  $i$ -го пузырька определяется действием внешнего периодического поля давления и полей давлений, которые создают остальные пузырьки:

$$\left(1 - \frac{\dot{a}_i}{C_l}\right) a_i \ddot{a}_i + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{a}_i}{3C_l}\right) \dot{a}_i^2 = \left(1 + \frac{\dot{a}_i}{C_l}\right) \frac{p_l|_{r=a_i} - p_{I,i}}{\rho_l} + \frac{a_i}{\rho_l C_l} \frac{d}{dt} (p_l|_{r=a_i} - p_{I,i}) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{2a_j \dot{a}_j^2 + a_j^2 \ddot{a}_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

где  $a_i$  — радиус  $i$ -го пузырька;  $p_l|_{r=a_i}$  — давление в жидкости на его поверхности;  $\rho_l$  и  $C_l$  — плотность жидкости и скорость звука в ней;  $r_{ij}$  —

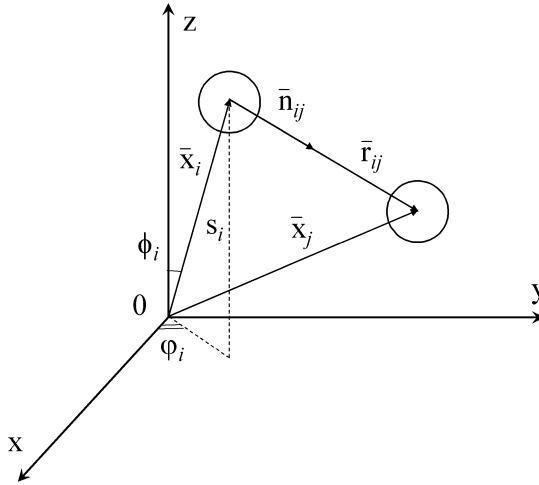


Рис. 1. Положение взаимодействующих пузырьков в пространстве относительно центра колбы

расстояние между  $i$ -ым и  $j$ -ым пузырьками;

$$p_{I,i} = p_{I0} - \Delta p C_l \sin(2\pi\omega t) \frac{\sin(2\pi\omega s_i/C_l)}{2\pi\omega s_i/C_l} - \frac{\rho_l}{4} (\bar{V}_i - \bar{W}_i)^2$$

— внешнее давление;  $s_i$  — радиальная координата  $i$ -го пузырька;  $\bar{V}_i$  — вектор его трансляционной скорости;

$$\begin{aligned} \bar{W}_i = W_{il}\bar{e}_{s_i} - W_{ij}\bar{n}_{ij} = & -\frac{\Delta p}{2\pi\rho_l\omega} \cos(2\pi\omega t) \times \\ & \times \left( \frac{\cos(2\pi\omega s_i/C_l)}{s_i} - \frac{C_l \sin(2\pi\omega s_i/C_l)}{2\pi\omega s_i^2} \right) \bar{e}_{s_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{a_j^2 \dot{a}_j}{r_{ij}^2} \bar{n}_{ij} \end{aligned}$$

— вектор скорости жидкости, возникающий за счет изменения внешнего поля давления (выражается первым слагаемым) и колебаний остальных пузырьков (второе слагаемое);  $\bar{e}_{s_i}$  — единичный вектор в радиальном направлении;  $\bar{n}_{ij}$  — единичный вектор в направлении от  $i$ -го пузырька к  $j$ -му.

Для определения поступательного движения каждого пузырька записывается уравнение баланса действующих на него сил:

$$\frac{4}{3}\pi\rho_{g,i}a_i^3 \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \bar{F}_{g,i} + \bar{F}_{b,i} + \bar{F}_{m,i} + \bar{F}_{s,i}, \quad (2)$$

где  $\bar{F}_{g,i} = -4/3\pi a_i^3(\rho_l - \rho_{g,i})\bar{g}$  — сила плавучести;  $\bar{F}_{b,i} = 4/3\pi a_i^3 \rho_l d\bar{W}_i/dt$  — сила Бьеркнеса;  $\bar{F}_{m,i} = -d/dt(2/3\pi\rho_l a_i^3(\bar{V}_i - \bar{W}_i))$  — сила присоединенной

массы;  $\bar{F}_{s,i} = -12\pi\mu_l a_i (\bar{V}_i - \bar{W}_i)$  — сила вязкого сопротивления;  $\rho_{g,i}$  — плотность пара в  $i$ -ом пузырьке;  $\mu_l$  — коэффициент динамической вязкости жидкости.

После подстановки выражений для сил в равенство (2) получаем уравнение трансляционного движения  $i$ -го пузырька:

$$\frac{d\bar{V}_i}{dt} = \left( \frac{1}{3} + \frac{2\rho_{g,i}}{3\rho_l} \right)^{-1} \left( \frac{d\bar{W}_i}{dt} - \left( \frac{\dot{a}_i}{a_i} + \frac{6\mu_l}{\rho_l a_i^2} \right) (\bar{V}_i - \bar{W}_i) - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\rho_{g,i}}{\rho_l} \right) \bar{g} \right).$$

Скорость массообменных процессов на поверхности парового пузырька определяется градиентом температуры в пристеночном слое жидкости. Для этого решается уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + (\bar{u}_l \cdot \bar{\nabla}) T_l = \kappa_l \Delta T_l, \quad (3)$$

где

$$\bar{u}_l(r, \theta, t) = \bar{\nabla} \left( -\frac{a_i^2 \dot{a}_i}{r} - V_i r \left( 1 + \frac{a_i^3}{2r^3} \right) \cos \theta \right);$$

$T_l$  — температура в жидкости;  $\kappa_l$  — коэффициент ее теплопроводности;  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты в системе отчета, связанной с  $i$ -ым пузырьком.

Примем, что пар в пузырьке подчиняется уравнению состояния для газа ван дер Ваальса:

$$p_g = \frac{\rho_g R T_g}{1 - B \rho_g} - A \rho_g^2,$$

где  $p_g$  и  $T_g$  — давление и температура пара;  $R$ ,  $A$  и  $B$  — газовые постоянные. В этом случае из законов сохранения массы и энергии пара в пузырьке с учетом равенства температур, массовых и тепловых потоков на межфазной поверхности, можно получить уравнение для определения температуры пара:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{g,i}}{dt} = \frac{dT|_{r=a_i}}{dt} = & \left( \frac{3\lambda_l}{a_i \rho_{g,i}} \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=a_i} - \frac{3\dot{a}_i h_i}{a_i} \right) \left( \frac{R}{\gamma - 1} - \right. \\ & \left. - \left( A + \frac{p_{g,i}}{\rho_{g,i}^2} - \frac{h_i}{\rho_{g,i}} \right) \left( \frac{dp_{g,i}}{dT_{g,i}} - \frac{\rho_{g,i} R}{1 - B \rho_{g,i}} \right) / \left( \frac{R T_{g,i}}{(1 - B \rho_{g,i})^2} - 2A \rho_{g,i} \right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $h_i$  — теплота парообразования, функция, зависящая от давления в паре  $p_{g,i}$ ;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\lambda_l$  — коэффициент теплопроводности жидкости.

Если температура пара в пузырьке становится выше критической для данного вещества  $T_{cr}$ , массообмен прекращается и вместо уравнения (4)

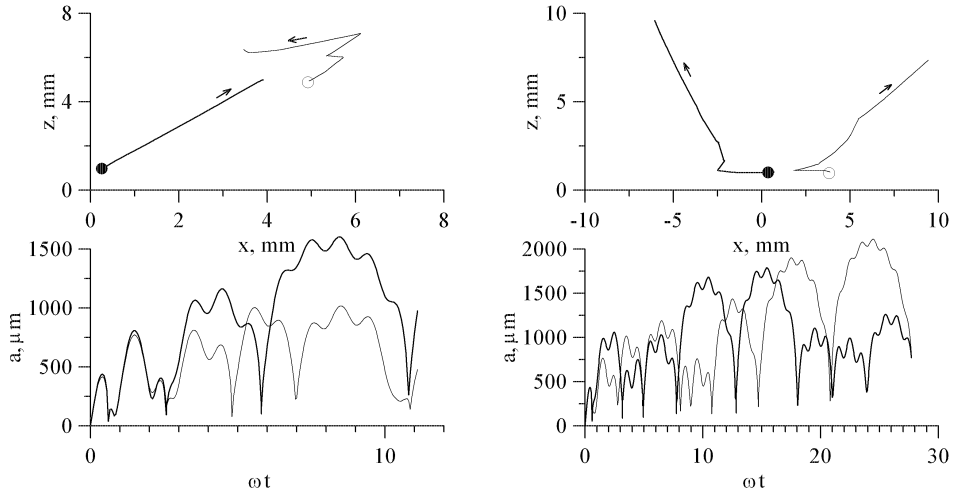


Рис. 2. Траектории взаимодействующих паровых пузырьков и динамика изменения их радиусов. Слева — притяжение, справа — отталкивание

используется следующее:

$$\frac{dT_{g,i}}{dt} = \frac{\gamma - 1}{R} \left( -\frac{3p_{g,i}\dot{a}_i}{a_i\rho_{g,i}} + \frac{3\lambda_l}{a_i\rho_{g,i}} \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=a_i} - \frac{3\rho_{g,i}\dot{a}_i A}{a_i} \right). \quad (5)$$

Численный алгоритм основан на сведении полученных равенств к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и решении их методом Дормана-Принса 8-го порядка точности.

### 3 Результаты численных расчетов

Для исследования взаимодействия двух паровых пузырьков в акустическом поле была проведена серия численных расчетов при параметрах внешнего воздействия, соответствующих экспериментальным условиям [3]:  $\Delta p = 15$  атм,  $\omega = 19.3$  кГц, в которых варьировались значения начальных радиусов пузырьков и их положения в пространстве относительно центра колбы.

Согласно полученным результатам было выявлено два основных типа движения пузырьков: взаимное притяжение и отталкивание (см. Рис. 2). При этом следует отметить, что во всех случаях как минимум один из взаимодействующих пузырьков перемещается по направлению от пучности акустической волны, расположенной в центре колбы.

Оба типа движения имеют место и в случае, когда происходят колебания нескольких пузырьков. На Рис. 3 представлены результаты расчета

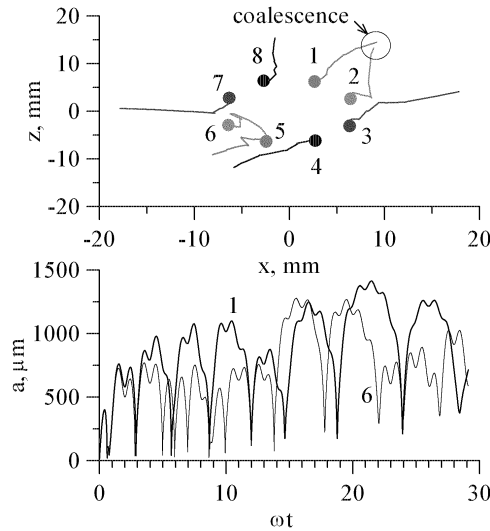


Рис. 3. Трансляционная и радиальная динамика восьми паровых пузырьков в сильном акустическом поле

взаимодействия восьми паровых пузырьков различных начальных радиусов ( $a_{0i} \in [10, 17]$  мкм), которые в начальный момент времени распределены вдоль окружности на одинаковом расстоянии от центра колбы.

## 4 Заключение

На основе предложенной математической модели проведено теоретическое исследование радиального и трансляционного движения паровых пузырьков в сильном акустическом поле. Установлены основные типы бинарных взаимодействий между пузырьками, которые определяют их совместную динамику в кластере.

## Список литературы

- [1] Hao Y., Prosperetti A. The dynamics of vapor bubbles in acoustic pressure fields // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11, № 8. Pp. 2008–2019.
- [2] Hao Y., Prosperetti A. Rectified heat transfer into translating and pulsating vapor bubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 112, № 5(1). Pp. 1787–1796.
- [3] Taleyarkhan R. P., West C. D., Cho J. S., Lahey R. T. Jr., Nigmatulin R. I., Block R. C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. 2002. V. 295. Pp. 1868–1873.