



ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТАТИЧЕСКИ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА

М. М. Шакирьянов

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Исследуются нелинейные свободные пространственные колебания статически изогнутого двухопорного трубопровода с рабочей средой.

Ключевые слова: трубопровод, пространственные колебания, моделирование, собственные частоты

1 Введение. Постановка задачи

Рассматриваются нелинейные свободные колебания трубы и заключенной в ней жидкости относительно горизонтальной оси и изгибные колебания по главной форме в плоскости трубы (Рис. 1). Длина трубы равна L , а суммарная масса однородной трубы и жидкости — m .

На Рис. 1 слева изображен элемент трубы длиной dx и массой $dm = \frac{m}{L} \cdot dx$, а справа на этом же рисунке показаны ускорения и силы, действующие на выделенный элемент трубы.

Касательное a_τ , нормальное a_n и кориолисово a_k ускорения элемента равны

$$a_\tau = w \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad a_n = w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_k = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1)$$

где w — прогиб элемента трубы; t — время.

Таким образом, силы инерции $d\Phi_\tau$, $d\Phi_n$ и $d\Phi_k$ выделенного элемента трубы запишутся

$$d\Phi_\tau = dm \cdot w \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad d\Phi_n = dm \cdot w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad d\Phi_k = 2dm \cdot \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Составим уравнение условного равновесия трубы в виде суммы момен-

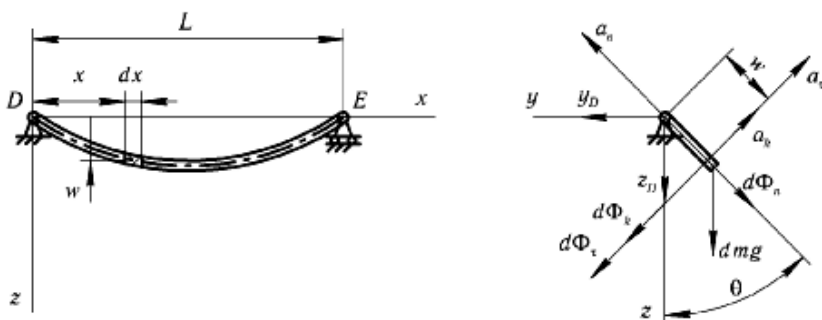


Рис. 1.

тов всех приложенных сил и сил инерции относительно оси Dx . Имеем:

$$-\int_{(m)} gw \sin \theta dm - \int_{(m)} d\Phi_{\tau} w - \int_{(m)} d\Phi_{\kappa} w = 0. \quad (3)$$

Это уравнение с учетом равенства (2) примет вид:

$$-\frac{m}{L} g \sin \theta \int_0^L w dx - \frac{m}{L} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int_0^L w^2 dx - \frac{2m}{L} \frac{d\theta}{dt} \int_0^L w \frac{\partial w}{\partial t} dx = 0. \quad (4)$$

Составим также дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы в своей плоскости

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{EJL}{m} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + g \cos \theta + w \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

где E — модуль упругости материала трубы; J — момент инерции поперечного сечения трубы. Статическое решение уравнения (5) для $\theta \equiv 0$, $\frac{d\theta}{dt} \equiv 0$ имеет вид:

$$W_0(x) = \frac{q}{24} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x), \quad q = \frac{mg}{EJL}.$$

Представляя решение уравнения (5) в виде суммы

$$w = W_0(x) + W(x, t),$$

уравнения (4) и (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} q L^5 g \sin \theta + \frac{31}{362880} q^2 L^9 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \sin \theta \int_0^L W dx + \\ & + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \int_0^L (2W_0(x)W + W^2) dx + 2 \frac{m}{L} \frac{d\theta}{dt} \int_0^L \left[(W_0(x) + W) \frac{\partial W}{\partial t} \right] dx = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\frac{EJL}{m} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - g(1 - \cos \theta) + [W_0(x) + W] \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (7)$$

Возьмем динамическую составляющую прогиба трубы в виде:

$$W(x, t) = w_0(t) \sin \frac{\pi}{L} x, \quad (8)$$

где $w_0(t)$ — максимальный прогиб. Подставляя функцию (8) в уравнения (6), (7) и пользуясь в последнем методом Бубнова-Галеркина [1], получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} q L^5 g \sin \theta + \frac{31}{362880} q^2 L^9 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2L}{\pi} g w_0 \sin \theta + \\ & + \frac{d^2 \theta}{dt^2} \left(\frac{4qL^5}{\pi^5} w_0 + \frac{L}{2} w_0^2 \right) + m \frac{d\theta}{dt} \frac{dw_0}{dt} \left(\frac{4qL^5}{\pi^5} + w_0 \right) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \frac{d^2 w_0}{dt^2} = & -\frac{EJL\pi^4}{mL^4} \frac{L}{2} w_0 - g(1 - \cos \theta) \frac{2L}{\pi} + \\ & + \left(\frac{4qL^5}{\pi^5} + w_0 \frac{L}{2} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

После несложных преобразований уравнения (9) и (10) можем рассматривать как систему

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{181440}{31q^2L^8} \left(\frac{8qL^4}{\pi^5} + w_0 \right) w_0 \right] \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{3024}{31} \frac{g}{qL^4} \sin \theta + \\ & + \frac{725760gw_0}{31q^2L^8} \sin \theta + \frac{362880}{q^2L^9} \frac{d\theta}{dt} \frac{dw_0}{dt} \left(\frac{qL^4}{\pi^5} + w_0 \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 w_0}{dt^2} + \frac{g\pi^4}{qL^4} w_0 + \frac{4g}{\pi} (1 - \cos \theta) - \left(\frac{8qL^4}{\pi^5} + w_0 \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0.$$

Эту систему уравнений будем решать при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{dw_0}{dt} = 0. \quad (12)$$

Здесь ω_0 — начальная угловая скорость трубы.

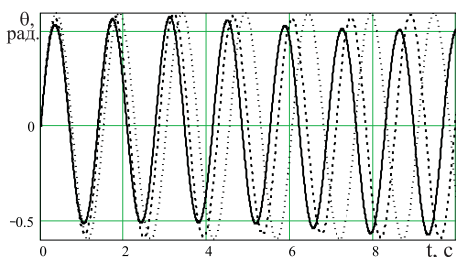


Рис. 2. Зависимость угла поворота трубы θ от времени t

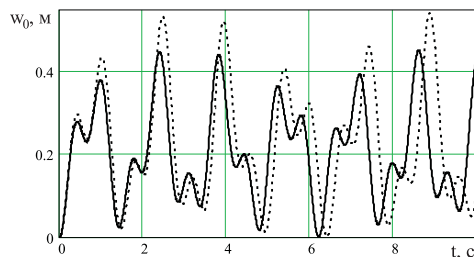


Рис. 3. Зависимость максимального динамического прогиба трубы w_0 от времени t

2 Результаты

Численное решение задачи Коши (11), (12) определялось методом Рунге–Кутты. Обсуждаемые ниже результаты вычислений были получены для следующих числовых значений параметров: $m = 9.266 \cdot 10^4$ кг, $L = 10$ м, $g = 9.8$ м/с², $EJ = 2.141 \cdot 10^9$ Нм², $\omega_0 = 2.5$ рад/с. На Рис. 2 и 3 приведены графики зависимости угла поворота трубы θ в радианах и максимального динамического прогиба w_0 в метрах от времени t в секундах. Результаты численного интегрирования с учетом силы инерции Кориолиса изображены сплошными линиями, а штриховыми — без учета указанной силы. Точечная линия на Рис. 2 представляет зависимость угла поворота от времени без учета динамической составляющей прогиба трубы. Учет силы инерции Кориолиса приводит к увеличению частоты свободных колебаний и уменьшению угла поворота трубы на 10% и максимального прогиба трубы в плоскости изгиба на 20%.

3 Заключение

Полученные уравнения пространственного движения трубы могут быть применены для анализа собственных колебаний трубопроводных систем.

Автор выражает благодарность М. А. Ильгамову за постановку задачи и А. Г. Хакимову за помощь в выполнении работы.

Список литературы

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 954 с.