



ЗАДАЧА О РАСТЕКании ЖИДКОСТИ НАД ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С УЧЕТОМ ПРОПИТЫВАНИЯ В ГРУНТ

С. А. Гильманов

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Аннотация. Предложена математическая модель, позволяющая на основе квазиодномерных уравнений проиллюстрировать процесс растекания жидкости над поверхностью грунта и пропитывания этой жидкости в грунт. Скорость пропитывания принята постоянной.

Ключевые слова: МПССС, флора, передний фронт потока, математическое моделирование, закон Маннинга, область растекания

1. Введение

Растекание жидкости вдоль подстилающей поверхности вызывает особый интерес как явление имеющее прикладной характер. Такие ситуации могут иметь место, например, при исследовании истечения жидкости из подземного хранилища или трубопровода. Различают источники мгновенных выбросов и выбросов постоянной или переменной мощности [1]. В данной работе будут рассмотрены источники постоянной мощности.

2. Математическая модель

Математическая модель в квазиодномерном приближении может быть записана в виде уравнения, отражающего закон сохранения массы [2]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rhv) = -u, \quad u = \frac{k\rho g}{m\mu}, \quad v = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

и уравнения для закона сохранения импульсов

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\tau_i}{h}. \quad (2)$$

Здесь $h = h(r, t)$ — высота потока жидкости; $v = v(r, t)$ — соответственно скорость; $H = H(r, t)$ — высота пропитывания жидкости в грунт; u — скорость пропитывания; k — проницаемость пласта; ρ — плотность жидкости; m — пористость пласта; μ — динамическая вязкость; τ_i — учитывает силы сопротивления со стороны окружающей среды. Подобные задачи для упрощения рассматриваются в безинерционном приближении, то есть полагается, что силы гравитации уравновешиваются силами инерции. Тогда (2) примет следующий вид:

$$-g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\tau_i}{h} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда преобладающим является сопротивление растеканию со стороны флоры. Для этого рассмотрим учет сопротивления со стороны густой флоры линейно пропорционально скорости растекания и редкой флоры — пропорционально квадрату скорости растекания. Тогда (3) можно записать в виде:

$$-g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{v}{t_v} = 0, \quad -g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{v^2}{r_v} = 0. \quad (4)$$

Выразив из (4) скорость и подставив в (1), получим следующие выражения для густой и редкой флоры:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gt_v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \sqrt{-gr_v} \frac{\partial h}{\partial r} \right) = -u. \quad (5)$$

Для решения этих уравнений воспользуемся методом последовательной смены стационарных состояний (МПССС)[3]. Положим, что процесс растекания является стационарным в каждый момент времени. Поэтому примем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Тогда получим:

$$-\frac{gt_v}{r} \frac{d}{dr} \left(rh \frac{dh}{dr} \right) = -u, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rh \sqrt{-gr_v} \frac{dh}{dr} \right) = -u. \quad (6)$$

Решая эти уравнения, получим следующие:

$$-\frac{1}{2}gt_v h(r)^2 = C_1 \ln r - \frac{1}{4}ur^2 + C_2, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3}gr_v h(r)^3 = -\frac{C_1^2}{r} - C_1 ur + \frac{1}{12}u^2 r^3 + C_2. \quad (8)$$

Для того, чтобы оценить величины C_1 , C_2 воспользуемся определением объемного расхода

$$Q = 2\pi r h(r) v(r)|_{r \rightarrow 0},$$

и тем предположением, что на переднем фронте потока высота жидкости равна 0 ($h(l(t)) = 0$).

Тогда получим

$$h(r, l(t)) = \sqrt{\frac{Q}{\pi g t_v} \ln\left(\frac{l(t)}{r}\right) - \frac{u}{2g t_v} (l(t)^2 - r^2)}, \quad (9)$$

$$h(r, l(t)) = \sqrt[3]{\frac{3Q^2}{4\pi^2 g r_v} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l(t)}\right) - \frac{3Qu(l(t) - r)}{2\pi g r_v} + \frac{u^2(l(t)^3 - r^3)}{4g r_v}}. \quad (10)$$

Далее, применяя уравнение баланса массы в интегральной форме и введя замену переменной $r = Rl(t)$, получим

$$2\pi \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{Q}{\pi g t_v} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{ul(t)^2}{2g t_v} (1-R^2)} \right) l(t)^2 R dR + \pi ul(t)^2 = Q, \quad (11)$$

$$2\pi \frac{d}{dt} \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{3Q^2 l(t)^2}{4\pi^2 g r_v} \left(\frac{1}{R} - 1\right) - \frac{3Qul(t)^4}{2\pi g r_v} (1-R) + \frac{u^2 l(t)^6}{4g r_v} (1-R^3)} R dR + \pi ul(t)^2 = Q. \quad (12)$$

Дифференцируя по времени под интегралом и проводя замену переменной

$$l(t) = \sqrt{\frac{Q}{\pi u}} L(t),$$

и осуществив преобразования, приходим к следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dL(t)}{dt} \int_0^1 \frac{(4 \ln(1/R) - 3L(t)^2(1 - R^2)) R}{\sqrt{(\ln(1/R) - 0.5L(t)^2(1 - R^2))}} dR = \frac{(1 - L(t)^2)}{L(t)} \sqrt{\frac{\pi u^2 g t_v}{Q}}, \quad (13)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} \int_0^1 \frac{10R^{\frac{2}{3}} - 28L(t)^2(1-R)R^{\frac{5}{3}} + 6L(t)^4(1-R^3)R^{\frac{5}{3}}}{\left(\sqrt[3]{6 - 12L(t)^2(1-R)R + 2L(t)^4(1-R^3)R}\right)^2} dR = Q^{(1)}, \quad (14)$$

$$Q^{(1)} = \frac{1 - L(t)^2}{L(t)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{\pi^3 u^5 g^2 r_v^2}{Q^3} \right)^{\frac{1}{6}}.$$

Введем безразмерное время T как

$$T = t \sqrt{\frac{\pi u}{Q}} \sqrt{u g t_v}$$

для случая густой флоры и

$$T = t \sqrt{\frac{\pi u}{Q}} \sqrt[3]{u g r_v}$$

для случая редкой флоры.

$$\frac{dL(T)}{dT} \int_0^1 \frac{(4 \ln(1/R) - 3L(T)^2(1 - R^2)) R^2}{\sqrt{(\ln(1/R) - 0.5L(T)^2(1 - R^2))} R^2} dR = \frac{1 - L(T)^2}{L(T)}, \quad (15)$$

$$\frac{dL(T)}{dT} \int_0^1 \frac{10R^{\frac{2}{3}} - 28L(T)^4(1-R)R^{\frac{5}{3}} + 6L(T)^6(1-R^3)R^{\frac{5}{3}}}{\left(\sqrt[3]{6 - 12L(T)^2(1-R)R + 2L(T)^4(1-R^3)R}\right)^2} dR = L_1(T), \quad (16)$$

$$L_1(T) = \frac{1 - L(T)^2}{L(T)^{\frac{2}{3}}}.$$

Решая уравнения (15)–(16) можно получить профили для безразмерного переднего фронта потока от безразмерного времени.

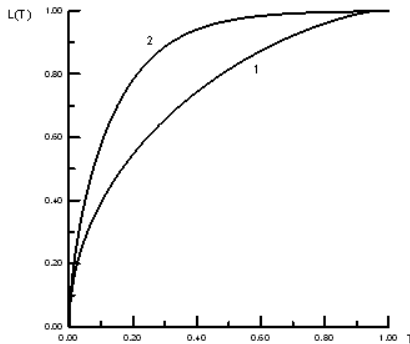


Рис. 1. Для безразмерного переднего фронта потока от безразмерного времени. 1 — густая флора, 2 — редкая флора

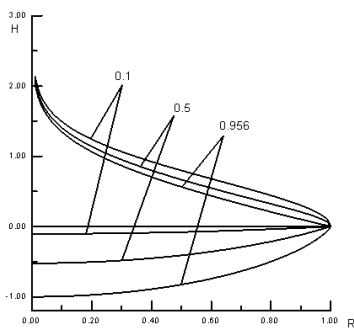


Рис. 2. Динамика безразмерного потока жидкости в случае густой флоры, безразмерное время указано на кривых

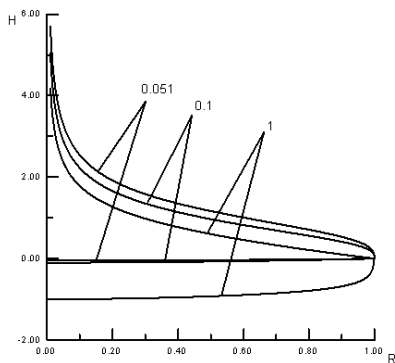


Рис. 3. Динамика безразмерного потока жидкости в случае редкой флоры, безразмерное время указано на кривых

3. Результаты

Из Рис. 1 следует, что растекание в случае редкой флоры происходит более интенсивно, однако размер области, на которую происходит растекание не зависит от того, как учтены силы сопротивления со стороны флоры. Растекание в случае редкой флоры происходит более интенсивно, однако в конце происходит замедление и по сравнению с густой флорой более медленный выход в стационар. Надо также заметить, что в случае редкой флоры высота потока вблизи переднего фронта быстрее уменьшается (Рис. 2 и 3).

Высота потока и глубина пропитывания в грунт обезразмерены как

$$H = h\sqrt{\frac{\pi g t_v}{Q}}.$$

На основе анализа этого выражения получим, что рост величины t_v приведет к увеличению времени растекания, рост объемного расхода приведет к увеличению области растекания

4. Заключение

Рассмотрено растекание жидкости с пропитыванием в грунт. Определено, что размер области пропитывания в грунт в горизонтальном направлении зависит от объемного расхода жидкости и скорости пропитывания в грунт, а глубина пропитывания зависит от вида учета сил сопротивления. Если в случае редкой флоры глубина во всей области более-менее равномерна, то в случае густой флоры глубина пропитывания уменьшается к краям области.

Список литературы

- [1] Методика оценки последствий аварийных выбросов опасных веществ. М.: ФГУП «НТЦ «Промышленная безопасность», 2005. 67 с.
- [2] Шагапов В. Ш., Галиаскарова Г. Р. О динамике накопления атмосферных выбросов отрицательной плавучести в безветренную погоду // ИФЖ. 2002. Т. 75, № 2. С. 22–27.
- [3] Басниев К. С., Кочина И. Н., Власов А. М. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.