УДК 621.9.048

Исследование решений нестационарных задач Хеле — Шоу с помощью численной фильтрации

В. П. Житников, О. Р. Зиннатуллина, Г. И. Федорова

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Задача на каждом временном шаге сводится к решению трех краевых задач для определения аналитических функций комплексного переменного: конформного отображения области параметрического переменного на физическую плоскость, задачи Дирихле для определения напряженности электрического поля и задачи Римана–Гильберта для вычисления частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства. Производится аппроксимация сплайн-функциями, описываются алгоритмы общего решения нестационарных задач, отличающиеся от известных своей точностью и устойчивостью. Представляются результаты численного решения.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, численно-аналитический метод, численная фильтрация

---

1. Введение

Рассматриваются задачи по решению уравнения Лапласа для потенциала Φ внутри некоторой области, на границах которой выполняется условие постоянства Φ, причем свободные границы могут быть подвижны (скорость движения пропорциональна градиенту Φ), либо быть стационарными, либо сохранять геометрическое подобие межэлектродного пространства (автомодельные решения). Такие задачи принято называть задачами Хеле–Шоу со свободными границами. Решения этих задач могут

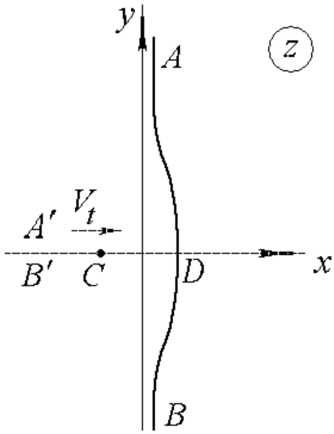

Рис. 1. Схема межэлектродного пространства

интерпретироваться как процессы растворения металлов при электрохимической обработке (ЭХО).

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу обработки точечным электродом-инструментом (ЭИ). Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на Рис. 1. Здесь ADB — граница растворяемого материала, точка C — точечный ЭИ, движущийся со скоростью V_t к обрабатываемой поверхности.

Потенциал Φ осесимметричного поля выражается через функцию комплексного переменного, аналитическую в области Z, форма границ которой совпадает с формой границ межэлектродного пространства в меридиональном сечении осесимметричного поля, с помощью формул (преобразований Г. Н. Положего [1]):

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int\limits_{\infty}^{Z_0} f(Z)\frac{dZ}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\overline{Z}_0)}}, \qquad (1)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$, $\overline{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

Потенциал осесимметричного течения получается путем интегрального преобразования (1), примененного к функции $f(Z) = dW/dZ$ [2].

Продольная и радиальная составляющие напряженности определяются дифференцированием (1).

Отобразим конформно области, соответствующие МЭП на плоскостях Z и W на полосу χ. При этом определение функции $W(Z)$, аналитической на области МЭП, можно решать в параметрическом виде. Границы области МЭП определяются через частную производную $\dfrac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$ численным методом путем дискретизации времени.

Таким образом, на каждом временном шаге решаются три краевые задачи.

Найти три аналитические внутри полосы χ функции $W(\chi, t)$, $Z(\chi, t)$ и $\dfrac{\partial Z}{\partial t}(\chi, t)$, удовлетворяющие определенным краевым условиям.

Краевым условием для определения функции $W(\chi, t)$ является условие эквипотенциальности анода.

Краевым условием для определения функции $Z(\chi, t)$ является равенство мнимой (или действительной) части $Z(\chi, t)$ на границе полосы $\chi = \sigma$ $(-\infty < \sigma < \infty)$, известной при каждом фиксированном t функции $g_1(\sigma, t)$.

Краевые условия для функции $\partial Z/\partial t(\chi, t)$ на границах МЭП определяются законом Фарадея. В безразмерных переменных краевое условие для определения производной $\partial z/\partial\tau(\chi, \tau)$ примет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{1}{y}\frac{d\psi}{d\sigma}. \tag{2}$$

3. Метод решения задачи

Задача конформного отображения решается следующим образом. В качестве области изменения параметрического переменного $\chi = \sigma + iv$ удобно выбрать полосу ширины $1/2$, так что нижняя граница соответствует обрабатываемой поверхности, верхняя — разрезу $A'CB'$.

Функция, отображающая плоскость χ на физическую, ищется в виде суммы

$$z(\chi) = z_0(\chi) + z_\Delta(\chi), \quad z_0(\chi) = ig\,\mathrm{sh}\,\pi\chi.$$

Функция $z_\Delta(\chi)$ получается следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках $\sigma_m (m = 0, \ldots, n)$. Искомыми будут значения $\mathrm{Re}\ z_\Delta(\sigma_m) = x_m$. При $\sigma = \sigma_n$ примем $\mathrm{Re}\ z_\Delta(\sigma_n) = 0$, поскольку $z_\Delta(\sigma)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \to \infty$. Значения $\mathrm{Re}\ z_\Delta(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $P(\sigma)$, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции $z_\Delta(\chi)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_\Delta(\chi)$ аналитическая функция, имеющая, как и $z_0(\chi)$ чисто действительные значения на прямой $\mathrm{Im}\chi = 1/2$.

Осесимметричная задача решается путем сведения ее к вспомогательной плоской задаче. Для ее решения область, соответствующая МЭП на плоскости комплексного потенциала, конформно отображается на плоскость параметрического переменного χ. Закон изменения потенциала на границах вспомогательной плоской задачи определяется краевым условием (1), то есть условием эквипотенциальности границы в осесимметричной задаче. Решение задачи можно искать в виде суммы

$$\begin{gathered}\varphi(x,y)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}-\\ -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int\limits_0^{\sigma_0}\frac{\partial w}{\partial\sigma}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)}},\end{gathered}\tag{3}$$

где $\varphi_0(x,y)$ — потенциал точечного источника, расположенного на расстоянии l слева от начала координат.

Будем искать решение в виде функции $f_1(\chi)=\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial\chi}(\chi)$. Искомыми параметрами будут значения действительной части функции $\mathrm{Re}\, f_1(\sigma_m)=f_m$ в узловых точках σ_m $(m=1,\cdots,n)$. Значения $\mathrm{Re}\, f_1(\sigma)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна. Для восстановления функции $f_1(\chi)$ используем формулу Шварца. Условие эквипотенциальности обрабатываемой поверхности при решении методом коллокаций приводит к системе уравнений (равенству нулю тангенциальной составляющей напряженности).

Нестационарная задача решается методом дискретных шагов по времени Δ_τ [3]. При этом на каждом временном шаге τ_j решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z и определения составляющих напряженности $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$.

После определения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ остается решить третью краевую задачу: найти частную производную $\dfrac{\partial z_\Delta}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)=\dfrac{\partial x_\Delta}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)+i\dfrac{\partial y_\Delta}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ, удовлетворяющую краевому условию (2).

Для вычисления производной $\dfrac{\partial z_\Delta}{\partial\tau}(\chi,\tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_\Delta(\chi,\tau_j)$.

После решения системы линейных алгебраических уравнений и определения частных производных $\dfrac{\partial x_\Delta}{\partial \tau}$ производится шаг по времени по методу предиктор–корректор второго порядка точности.

Далее процесс повторяется.

4. Определение параметров переходных процессов

Исследованию подлежит закон установления автомодельной, стационарной и финальной форм при увеличении безразмерного времени.

Порядок расчета следующий. Отдельно рассчитываются автомодельная и стационарная формы. Значения параметров уточняются путем численной фильтрации результатов расчетов, полученных при различном числе точек коллокаций [4]. В результате фильтрации точность повышалась на 2–4 значащих цифры. Затем решалась нестационарная задача, при этом значения параметров на каждом временном шаге также подвергались численной фильтрации. Далее уточненные параметры формы (линейные размеры, кривизна обрабатываемой поверхности) сравнивались с предельными, и исследовалась зависимость разностей от времени. Поскольку зависимости оказались близкими к экспоненциальным, определялись декременты. Так как каждое действие: вычисление кривизны дифференцированием зависимостей линейных размеров, вычисление разностей с последующим логарифмированием, определение декремента приводит каждый раз к потере примерно половины точных значащих цифр, уточнение исходных результатов оказалось решающим при формулировке вывода.

На Рис. 2 дана зависимость десятичного логарифма разности $-\lg\left|\dfrac{S(\tau)-S^*}{S^*}\right|$ от безразмерного времени τ, где S — зазор; S^* — величина стационарного зазора. Видно, что эта зависимость близка к линейной, то есть закон установления близок к экспоненциальному. Точность приближения к предельному значению ограничена 10-ю знаками, которые получаются при экстраполяции данных нестационарной задачи, и объясняется ограниченностью вычислительных ресурсов при ее решении. Для оценки параметров линейной зависимости применялся метод наименьших квадратов. В результате получены следующие значения: постоянная времени (угловой коэффициент логарифмической зависимости) $k_\tau = 2.09$; аддитивная постоянная $a = -1.92$; среднеквадратичная погрешность аппроксимации $\sigma_a = 0.01$.

При исследовании зависимости кривизны обрабатываемой поверхности в точке, ближайшей к ЭИ, от безразмерного времени τ (установле-

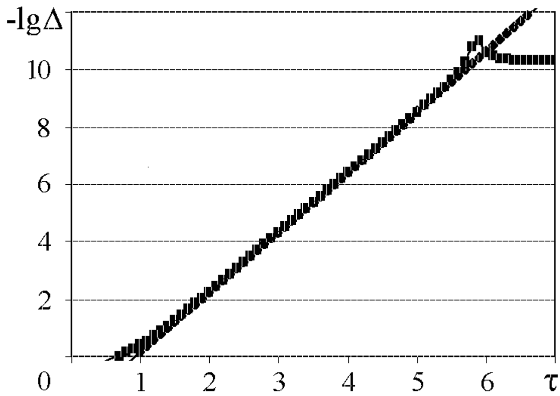

Рис. 2. Установление стационарного зазора при бесконечно удаленном начальном положении ЭИ: зависимость десятичного логарифма разности от времени

ния стационарного значения кривизны) получены параметры: $k_\tau = 2.09$; $a = -2.16$; $\sigma_a = 0.005$. Аналогичные зависимости получены для нулевого начального зазора. Получены следующие значения: $k_\tau = 2.08$; $a = -0.68$; $\sigma_a = 0.01$. Таким же способом получены параметры зависимости максимальной кривизны от времени для бесконечно удаленного ЭИ (установление значения кривизны финальной формы): $k_\tau = 2.08$; $a = -2.88$; $\sigma_a = 0.05$.

5. Заключение

В результате исследований временных характеристик процессов установления параметров форм к стационарным и финальным значениям во всем диапазоне значений начального зазора между ЭИ и исходной обрабатываемой поверхностью показало, что постоянная времени k_τ одинакова во всех случаях (≈ 2.1) в пределах достигнутой точности.

Список литературы

[1] Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. ун-т, 1965. 442 с.

[2] Житников В. П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функции комплексного переменного. Уфа: УГАТУ, 1994. 106 с.

[3] Zhitnikov V. P., Fedorova G. I., Zinnatullina O. R., Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining // Journal of Materials Processing Tech. 2004. V. 149/1-3. Elsevier. P. 398–403.

[4] Zhitnikov V. P., Zinnatullina O. R., Sherykhalina N. M., Oshmarin A. A. Numerical filtration as methodv of précisingv of computing results and error estimation // Proceedings of the 8-th Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2006. Karlsruhe, Germany, 2006. V. 1. P. 134–137.