

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, БЛИЗКИХ К ПРЕДЕЛЬНЫМ, С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Н. М. Шерыхалина, А. А. Ошмарин, Е. М. Ошмарина

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. Рассматривается задача о течении идеальной несжимаемой невязкой весомой жидкости над плоскостью. Особое внимание уделяется волнам с амплитудой, близкой к максимальной (волне Стокса). Проводится численное исследование и экстраполяция результатов вычислений на основе численной фильтрации для оценки асимптотических параметров. Приведенные в сообщении примеры применения предлагаемых способов фильтрации демонстрируют их эффективность.

Ключевые слова: весомая жидкость, крутые волны, численная фильтрация

1. Введение

Рассмотрим задачу о периодических волнах на поверхности весомой жидкости конечной и бесконечной глубин. Эта задача представляет большой интерес в связи с многочисленными техническими приложениями и теоретическим значением (см. например [1, 2]).

При решении различных задач особую сложность для исследования представляют предпредельные случаи, когда какой-нибудь из геометрических или физических параметров приближается к своему экстремальному. Как правило, в таких случаях задача распадается на две связанные

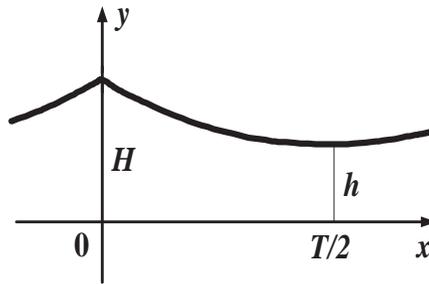


Рис. 1. Задача о волнах на поверхности весоной жидкости

подзадачи, имеющие различные характерные масштабы.

Пример предпредельного случая — это крутые волны, то есть волны, высота которых приближается к максимальной (в пределе на свободной границе образуется излом с внутренним углом 120° , волна Стокса, см. Рис. 1). Такие волны удобно характеризовать параметром $A = \ln(V_0/V_c)$, где V_c и V_0 — скорости в горбах и впадинах волны. Из [1] известно, что при $A \rightarrow \infty$ зависимости параметров волны имеют осциллирующий характер

$$F = F^* (1 + a_M e^{-3A} \cos(\kappa A - b_M)) + O(e^{-rA}), \quad (1)$$

причем известна только частота κ .

Основной задачей данной работы является разработка методов определения асимптотических характеристик по данным, полученным в ограниченном диапазоне, когда характер зависимости еще нельзя считать близким к асимптотическому.

Задача определения поля скоростей и формы волны сводится к поиску аналитической функции комплексного переменного, которая удовлетворяет на свободной границе следующему нелинейному краевому условию (уравнению Бернулли)

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = 1 + \frac{2}{Fr^2},$$

где V — скорость на границе; V_0 — скорость во впадине; y — ордината точки границы; h — характерный линейный размер. Все границы считаются непроницаемыми, дно — прямолинейным. Задача решается модифицированным методом Леви-Чивиты [3, 4].

2. Определение параметров асимптотических зависимостей крутых волн

Рассмотрим задачу о волнах на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Число Фруда для этой задачи определяется отношением

$$\text{Fr} = V_0 \sqrt{2\pi/(\lambda g)},$$

где V_0 — характерная скорость; λ — длина волны; g — ускорение свободного падения.

Результаты вычислений и оценки погрешности чисел Фруда приведены в [5] и изображены на Рис. 2 в виде множества точек 1. Из рисунка видно, что рассчитанный диапазон A охватывает только первый максимум, и увидеть осцилляцию зависимости Fr от A не представляется возможным.

На первом шаге неизвестные величины, входящие в (1) определяются путем решения системы нелинейных уравнений вида

$$F_j = F^* (1 + a_M e^{-3A_j} \cos(\kappa A_j - b_M)). \quad (2)$$

При этом можно использовать два подхода: считать число F^* неизвестным, как предлагалось в [2] (тогда необходимо решать систему из трех уравнений), либо воспользоваться вычисленным с высокой точностью значением F^* . В последнем случае решение системы двух уравнений типа (2) (двухточечная схема) может быть записано в виде:

$$a_M e^{ib_M} = \frac{z_{j-1} e^{i\kappa A_j} - z_j e^{-i\kappa A_{j-1}}}{i \sin \kappa (A_j - A_{j-1})}, \quad z_j = (F_j - F^*) e^{3A_j}.$$

Результат применения этих методов демонстрируется на Рис. 2, где точками 1 отмечены значения z_j/a_M а сплошной линией 1 — полученная косинусоида $\cos(\kappa A_j - b_M)$. Видно, что при $A > 2$ точки лежат достаточно близко от кривой.

Чтобы оценить точность определения параметров a_M и b_M , были проведены расчеты этих величин при увеличении параметра A . На Рис. 3 (кривые 1, 2) приведены результаты этих вычислений. Из рисунка видно, что произвести оценку асимптотических значений параметров a_M и b_M по этим кривым весьма затруднительно.

Как показывает Рис. 2 (кривая 2), взвешенная разность между вычисленными значениями и полученной косинусоидой $[z_j/a_M - \cos(\kappa A_j - b_M)]e^{3A}$ может быть аппроксимирована косинусоидой $\cos(2\kappa A - b_2)$. Поэтому более точная модель имеет вид:

$$F = F^* [1 + a_M e^{-3A} \cos(\kappa A - b_M) + e^{-3A} (c_2 + a_2 \cos(2\kappa A - b_2))] + O(e^{-r_1 A}). \quad (3)$$

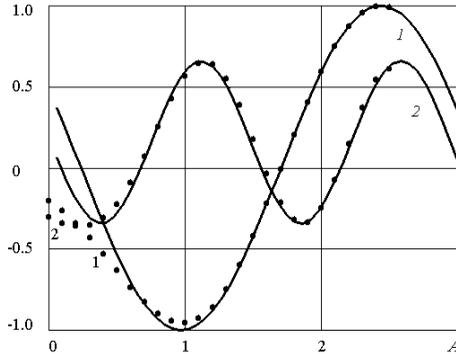


Рис. 2. Вычисленные значения z_j/a_M (множество точек 1), полученная косинусоида $\cos(\kappa A - b_M)$ (кривая 1), их взвешенные разности (множество точек 2), косинусоида $\cos(2\kappa A - b_2)$ (кривая 2)

Поскольку в эту формулу входят пять неизвестных параметров a_M , b_M , a_2 , b_2 , c_2 , то для их определения необходимо использовать пять табличных значений и решать систему из пяти уравнений. Результаты решения приведены на рис. 3 (кривая 3).

Разность между (1) и (3) может быть рассмотрена как оценка погрешности модели (1).

Задачу определения неизвестных параметров затухающих колебаний с большим числом слагаемых более удобно решать, если применить фильтрацию. Идея фильтрации заключается в следующем [5]. Основная причина погрешности определения значений a_M и b_M в (1) заключается в наличии других составляющих зависимости. Хотя эти составляющие затухают при увеличении A быстрее, чем главный член, но в анализируемом диапазоне значений A их уровень остается достаточно большим. Если подавить эти составляющие, то точность определения a_M и b_M возрастет.

Фильтрация осуществляется следующим способом. Пусть некоторая зависимость представляется в виде

$$z(x) = ae^{-kx} \cos(\omega x - b) + \varphi(x).$$

Предположим, что известны три значения $z_1 = z(x_1)$, $z_2 = z(x_2)$, $z_3 = z(x_3)$ при $x_3 - x_2 = -x_2 - x_1 = h$. Запишем систему уравнений

$$z_1 = ae^{-kx_2} e^{kh} \frac{1}{2} (e^{i\omega x_2} e^{-i\omega h} e^{-ib} + e^{-i\omega x_2} e^{i\omega h} e^{ib}) + \varphi(x_1),$$

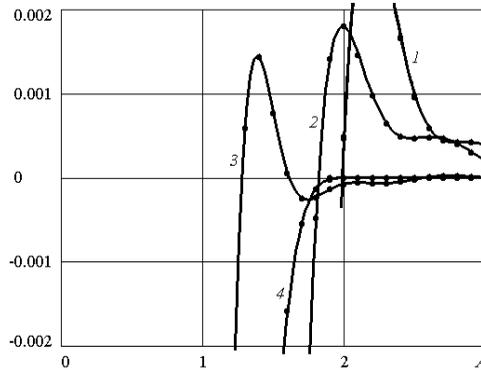


Рис. 3. Результаты оценки параметра a_M : кривая 1 — по трехточечной схеме; 2 — по двухточечной схеме; 3 — по пятиточечной схеме; 4 — методом фильтрации

$$z_2 = ae^{-kx_2} \frac{1}{2} (e^{i\omega x_2} e^{-ib} + e^{-i\omega x_2} e^{ib}) + \varphi(x_2),$$

$$z_3 = ae^{-kx_2} e^{-kh} \frac{1}{2} (e^{i\omega x_2} e^{i\omega h} e^{-ib} + e^{-i\omega x_2} e^{-i\omega h} e^{ib}) + \varphi(x_3).$$

Линейная комбинация этих уравнений позволяет исключить затухающую косинусоиду

$$\begin{aligned} z_1 e^{-kh} + z_3 e^{kh} - 2z_2 \cos(\omega h) = \\ = \varphi(x_1) e^{-kh} + \varphi(x_3) e^{kh} - 2\varphi(x_2) \cos(\omega h). \end{aligned}$$

На Рис. 3 результаты применения фильтрации с исключением составляющих суммы (3) при $k = 6$, $\eta_1 = 2\kappa$, $\eta_2 = 3\kappa$, $\eta_3 = 5\kappa$ обозначены кривыми 4. Видно, что по сравнению с другими данные кривые устанавливаются довольно быстро. Однако необходимость использования нескольких табличных значений, вычисленных для меньших чисел A , приводит к некоторому ухудшению результатов при $A < 2$.

В результате оценки получена уточненная модель типа (3) для $G = F^2$

$$G = G^* \left[1 + a_M e^{-3A} \cos(\kappa A - b_M) + e^{-6A} \left(c_2 + \sum_{j=2}^5 a_j \cos(j\kappa A - b_j) \right) \right], \quad (4)$$

где $a_M = 0.8268$, $b_M = -1.0648$, $a_2 = 0.5658$; $b_2 = -1.5148$, $c_2 = 0.2508$, $a_3 = 0.01292$, $b_3 = 1.494$, $a_5 = 1.054e - 4$, $b_5 = 0.3595$.

3. Заключение

Таким образом, применение фильтрации позволяет получить значение искомого параметра с точностью, недоступной при прямом расчете и существенно расширить диапазон исследований.

Список литературы

- [1] Longuet-Higgins M. S. and Fox M. J. H. Theory of the almost-highest wave, Part 2, Matching and analytical extension // J. Fluid Mech. 1978. V. 85. P. 769–786.
- [2] Maklakov D. V. Almost-highest gravity waves on water of finite depth // Euro. Journal of Applied Mathematics. 2001. V. 13. P. 67–93.
- [3] Житников В. П., Шерыхалина Н. М. Расчет формы уединенных волн с помощью численно-аналитических методов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. Т. 1, № 2–3. С. 103–107.
- [4] Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Шерыхалин О. И. Исследование закритических режимов в нелинейной задаче о движении вихря под свободной поверхностью весомой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 70–76.
- [5] Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M. Application of multistage extrapolation for hydrodynamic problems // High speed hydrodynamics (HSH-ГБС 2002): Proceedings. 2002. Cheboksary, Russia. P. 407–418.