УДК 531.66; 51.72

Численная реализация конечно-элементного метода контрольного объема на нерегулярных сетках

Гафарова Ю. А.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Рассматриваются возможность применения нерегулярных сеток и использование различных численных методов на них для решения задач со сложной геометрией. Получены дискретные аналоги уравнений Бельтрами–Митчелла на прямоугольной сетке методом контрольного объема и на треугольной сетке Делоне конечно-элементным методом контрольных объемов (КЭМКО). Продемонстрирована эффективность использования триангуляции Делоне, диаграммы Вороного и КЭМКО на тестовом примере.

1. Введение

Многообразие условий залегания пологих пластов и продолжающийся рост разработки месторождений полезных ископаемых приводят к необходимости анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных слоев вокруг подземных выработок всевозможных назначений и различных очертаний.

Возникает необходимость формирования расчетных сеток, обладающих более гибкими свойствами, с целью адаптации к сложной геометрии задачи и постановке граничных условий. Для этого применяют сетки с нерегулярной структурой. Среди нерегулярных сеток выделяют структурированные и неструктурированные. Треугольные сетки являются наиболее используемыми неструктурированными сетками. При построении треугольной сетки желательно, чтобы треугольники были близки к равносторонним, и сетка была равномерной. Этим требованиям соответствует триангуляция по Делоне, при которой минимизируется отклонение внутренних углов треугольников от углов правильного треугольника [1].

Существует несколько подходов к построению разностных схем на треугольных сетках: метод опорных операторов, метод конечных элементов, метод контрольного объема.

Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Однако, при такой аппроксимации есть проблемы получения монотонных разностных схем [2].

Метод контрольного объема (МКО) является наиболее общим подходом к построению дискретных аналогов дифференциальных уравнений. Для каждого узла определяется окрестность, называемая контрольным объемом. Дискретный аналог получается интегрированием исходного уравнения по контрольному объему с некими предположениями о поведении решения [3]. Основной особенностью МКО является применение для построения разностных схем локальных законов сохранения, что ведет к прямой физической интерпретации результирующих разностных уравнений.

Конечно-элементный метод контрольного объема (МКЭКО) для треугольной сетки может рассматриваться как вариант МКО с вершинно-центрированной дискретизацией. Многогранный контрольный объем строится вокруг узла сетки. Локальное изменение переменной внутри элемента описывается простыми кусочно-полиномиальными функциями, определенными на элементе, что позволяет получать дискретный аналог для произвольных неструктурированных сеток. Таким образом, МКЭКО сочетает преимущества МКО и МКЭ.

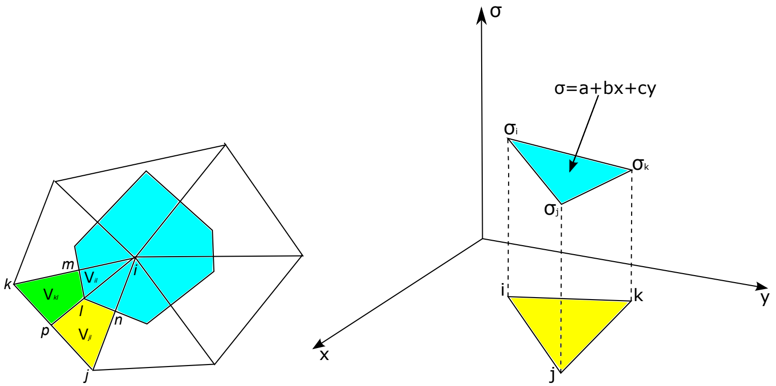
При триангуляции в качестве контрольного объема можно выбрать часть треугольника, которая получается при пересечении медиан, или многоугольник Вороного. Важно, что и в том и в другом случае в качестве критерия выбора контрольного объема положены совершенно прозрачные геометрические требования: в первом случае — разделение треугольника на три равновеликие части, во втором — геометрическая близость точек расчетной области. Среди плюсов разбиения медианами отметим, что оно проводится для произвольного разбиения на треугольники, не ограничиваясь триангуляцией Делоне. Преимущества разбиения Вороного представляются более весомыми и связаны с ортогональностью сторон треугольника к граням многоугольников Вороного. Эвристические соображения в пользу многоугольников Вороного связаны с идеей глобализации сетки и контрольных объемов — оптимизация для всех узлов, а не для отдельного треугольника.

Первоначальное разбиение исследуемой области на суперэлементы позволяет применить МКЭКО для задач с локальными сеточными сгущениями, обеспечив гладкие переходы от крупной сетки к мелкой.

2. Численное моделирование НДС грунта

Для исследования напряженно-деформированного состояния упругого слоя сложной геометрии получен дискретный аналог уравнений Бельтрами–Митчелла в декартовых координатах для плоского деформированного состояния без учета объемных сил (1) [4] конечно-элементным методом контрольного объема на треугольной сетке Делоне:

$$\begin{aligned} \triangle\sigma_{xx} + \frac{\partial^2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial x^2} &= 0, \\ \triangle\sigma_{yy} + \frac{\partial^2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial y^2} &= 0, \\ \triangle\sigma_{xy} + \frac{\partial^2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial x\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$



(a) Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного (b) Линейная итерполяция на треугольном элементе

Рис. 1. КЭМКО на треугольной сетке Делоне

В качестве контрольных объемов рассматривались многоугольники Вороного. Изначально сетка разбивалась на прямоугольные суперэлементы, что позволило сгустить сетку в более сложных областях.

Формирование контрольных объемов около узлов i-j-k, находящихся в вершинах конечных элементов, происходит следующим образом (рис. 1): определяются середины сторон треугольника n, m, p, вершина многоугольника Вороного l, вклады в контрольный объем $\triangle V_{il}$, $\triangle V_{jl}$, $\triangle V_{kl}$.

Вершина диаграммы Вороного определяется как центр описанной окружности. Вычисление этой точки через площадь треугольника и определитель [5] будет трудоемкой операцией. Эффективней использовать прямую формулу для нахождения вершины многоугольника. Так как середины сторон треугольника найдены, можно определить точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Она и будет одной из вершин многоугольника Вороного.

В декартовой системе координат объем вклада конечного элемента в контрольный объем i-ого узла

$$\triangle V_{il} = \triangle V_{iln} + \triangle V_{ilm} = \frac{1}{2}(d(l,m)d(m,i) + d(l,n)d(n,i))\triangle z,$$

где $d(l,m) = \sqrt{(x_l - x_m)^2 + (y_l - y_m)^2}$ — расстояние между соответствующими узлами.

Размер расчетной области для слоя в направлении оси z составляет $\triangle z = 1$ м.

Контрольный объем i-ого узла собирается из всех вкладов, содержащих данный узел.

На элементе i–j–k применяется линейная интерполяция (рис. 1) [2]

$$\sigma = \mathbf{N}\begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix} = N_i\sigma_i + N_j\sigma_j + N_k\sigma_k, \qquad (2)$$

где $\mathbf{N} = (N_i, N_j, N_k)$ — функции формы. Для треугольного линейного элемента функции формы имеют следующий вид:

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right),$$
$$N_j = \frac{1}{2A}\left(a_j + b_j x + c_j y\right),$$
$$N_k = \frac{1}{2A}\left(a_k + b_k x + c_k y\right),$$

где $A = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ — площадь треугольника i–j–k; компоненты векторов a, b, c определяются как

$$\begin{cases} a_i = x_i y_k - x_k y_j, \\ b_i = y_j - y_k, \\ c_i = x_k - x_j, \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k, \\ b_j = y_k - y_i, \\ c_j = x_i - x_k, \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i, \\ b_k = y_i - y_j, \\ c_k = x_j - x_i. \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого уравнения (1) имеет вид

$$\sum_{l \in W} \mathbf{K\Sigma} = \sum_{l \in W} \mathbf{F}, \tag{3}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{DB}$ — локальная матрица жесткости; $\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix}$ — матрица градиентов; $\mathbf{D}$ — матрица свойств материалов; $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix}$ — вектор узловых значений напряжений; $\mathbf{F}$ — локальный вектор нагрузки; W — множестово конечных элементов расчетной области.

Раскроем в системе уравнений (1) оператор Лапласа и соберем все коэффициенты при неизвестных. Тогда уравнения Бельтрами–Митчелла будут выглядеть:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Операторы $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ проинтегрируем по вкладу $\triangle V_{il}$ в контрольный объем i-ого узла от l-ого конечного элемента:

$$\int\limits_{\triangle V_{il}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\, dV = \int\limits_{\triangle V_{il}} \mathbf{B}^T\mathbf{DB\Sigma}\, dV =$$

$$= \frac{\triangle V_{il}}{4A^2}\begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \tag{5}$$

$$= \frac{\triangle V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{\triangle V_{il}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \, dV = \int\limits_{\triangle V_{il}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{\Sigma} \, dV = \\ = \frac{\triangle V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \\ = \frac{\triangle V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_{\triangle V_{il}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \, dV = \int\limits_{\triangle V_{il}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{\Sigma} \, dV = \\ = \frac{\triangle V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \\ = \frac{\triangle V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i c_i & b_i c_j & b_i c_k \\ b_j c_i & b_j c_j & b_j c_k \\ b_k c_i & b_k c_j & b_k c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим l-ый конечный элемент. Заменим в первом уравнении (4) вторые производные на их разностные аналоги (5–7):

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} b_i^l b_i^l & b_i^l b_j^l & b_i^l b_k^l \\ b_j^l b_i^l & b_j^l b_j^l & b_j^l b_k^l \\ b_k^l b_i^l & b_k^l b_j^l & b_k^l b_k^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i \triangle V_{il} \\ \sigma_{xx}^j \triangle V_{jl} \\ \sigma_{xx}^k \triangle V_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_i^l c_i^l & c_i^l c_j^l & c_i^l c_k^l \\ c_j^l c_i^l & c_j^l c_j^l & c_j^l c_k^l \\ c_k^l c_i^l & c_k^l c_j^l & c_k^l c_k^l \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i \triangle V_{il} \\ \sigma_{xx}^j \triangle V_{jl} \\ \sigma_{xx}^k \triangle V_{kl} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i^l b_i^l & b_i^l b_j^l & b_i^l b_k^l \\ b_j^l b_i^l & b_j^l b_j^l & b_j^l b_k^l \\ b_k^l b_i^l & b_k^l b_j^l & b_k^l b_k^l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{yy}^i \triangle V_{il} \\ \sigma_{yy}^j \triangle V_{jl} \\ \sigma_{yy}^k \triangle V_{kl} \end{pmatrix} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Соберем все коэффициенты перед неизвестными σ_{xx} узлами l-ого элемента σ_{xx}^i, σ_{xx}^j, σ_{xx}^k, остальное занесем в источниковый член. Таким образом (8) можно записать:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} a_{ii}^l\sigma_{xx}^i + a_{ij}^l\sigma_{xx}^j + a_{ik}^l\sigma_{xx}^k \\ a_{ji}^l\sigma_{xx}^i + a_{jj}^l\sigma_{xx}^j + a_{jk}^l\sigma_{xx}^k \\ a_{ki}^l\sigma_{xx}^i + a_{kj}^l\sigma_{xx}^j + a_{kk}^l\sigma_{xx}^k \end{pmatrix} = \\ = -\begin{pmatrix} b_i^l b_i^l \triangle V_{il}\sigma_{yy}^i + b_i^l b_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{yy}^j + b_i^l b_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{yy}^k \\ b_j^l b_i^l \triangle V_{il}\sigma_{yy}^i + b_j^l b_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{yy}^j + b_j^l b_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{yy}^k \\ b_k^l b_i^l \triangle V_{il}\sigma_{yy}^i + b_k^l b_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{yy}^j + b_k^l b_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{yy}^k \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{9}$$

где $a_{ij}^l = \left(2b_i^l b_j^l + c_i^l c_j^l\right) \triangle V_{jl}$.

Система линейных алгебраических уравнений относительно напряжения σ_{xx} в узлах l-ого элемента,(9) — дискретный аналог 1-ого уравнения Бельтрами–Митчелла.

Аналогично получаем дискретные аналоги для для 2-ого и 3-его уравнений Бельтрами–Митчелла:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} a_{ii}^l\sigma_{yy}^i + a_{ij}^l\sigma_{yy}^j + a_{ik}^l\sigma_{yy}^k \\ a_{ji}^l\sigma_{yy}^i + a_{jj}^l\sigma_{yy}^j + a_{jk}^l\sigma_{yy}^k \\ a_{ki}^l\sigma_{yy}^i + a_{kj}^l\sigma_{yy}^j + a_{kk}^l\sigma_{yy}^k \end{pmatrix} = \\ = -\begin{pmatrix} c_i^l c_i^l \triangle V_{il}\sigma_{xx}^i + c_i^l c_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{xx}^j + c_i^l c_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{xx}^k \\ c_j^l c_i^l \triangle V_{il}\sigma_{xx}^i + c_j^l c_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{xx}^j + c_j^l c_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{xx}^k \\ c_k^l c_i^l \triangle V_{il}\sigma_{xx}^i + c_k^l c_j^l \triangle V_{jl}\sigma_{xx}^j + c_k^l c_k^l \triangle V_{kl}\sigma_{xx}^k \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{10}$$

где $a_{ij}^l = \left(2c_i^l c_j^l + b_i^l b_j^l\right) \triangle V_{jl}$;

$$\begin{pmatrix} a_{ii}^{l}\sigma_{xy}^{i} + a_{ij}^{l}\sigma_{xy}^{j} + a_{ik}^{l}\sigma_{xy}^{k} \\ a_{ji}^{l}\sigma_{xy}^{i} + a_{jj}^{l}\sigma_{xy}^{j} + a_{jk}^{l}\sigma_{xy}^{k} \\ a_{ki}^{l}\sigma_{xy}^{i} + a_{kj}^{l}\sigma_{xy}^{j} + a_{kk}^{l}\sigma_{xy}^{k} \end{pmatrix} = \\ = -\begin{pmatrix} b_i^l c_i^l \triangle V_{il} s_i + b_i^l c_j^l \triangle V_{jl} s_j + b_i^l c_k^l \triangle V_{kl} s_k \\ b_j^l c_i^l \triangle V_{il} s_i + b_j^l c_j^l \triangle V_{jl} s_j + b_j^l c_k^l \triangle V_{kl} s_k \\ b_k^l c_i^l \triangle V_{il} s_i + b_k^l c_j^l \triangle V_{jl} s_j + b_k^l c_k^l \triangle V_{kl} s_k \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $a_{ij}^{l} = \left(2b_i^l b_j^l + c_i^l c_j^l\right) \triangle V_{jl}$, $s_i = \left(\sigma_{xx}^{i} + \sigma_{yy}^{i}\right)$.

Полученные СЛАУ решаются методом сопряженных градиентов и уточняются по всему многоугольнику Вороного.

3. Демонстрационный пример

В процессе бурения возникает задача определения напряжения для неограниченной области с круговым отверстием радиуса R при однородном нормальном давлении p.

Для решения этой задачи расчетная область разбивается на 7 суперэлементов, что позволяет сгустить сетку в более сложных областях (рис. 2). На каждом элементе производится триангуляция Делоне.

Начальные условия на отверстии задаются направляющими косинусами:

$$\sigma_{xx} = \frac{x}{R}p, \quad \sigma_{yy} = \frac{y}{R}p, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

На рис. 3 представлено распределение давления по пласту. Исходя из графиков видно, что по мере приближения к оси x напряжение σ_{xx} возрастает, а σ_{yy} — убывает. На графиках, представленных на рис. 4, приведено сравнение МКО и КЭМКО для первых 20 узлов расчетной области. КЭМКО более точно описывает распределение давления в нагруженной области чем МКО.

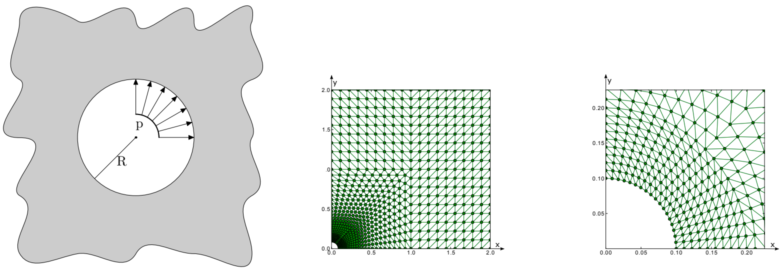
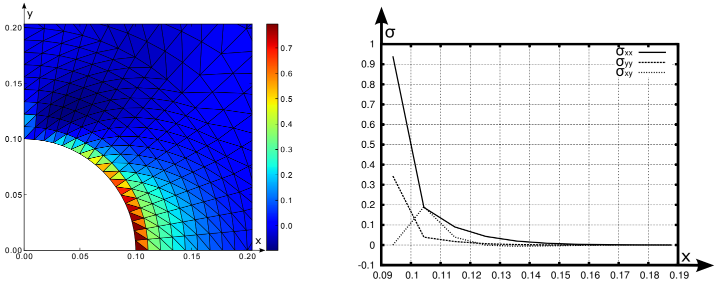
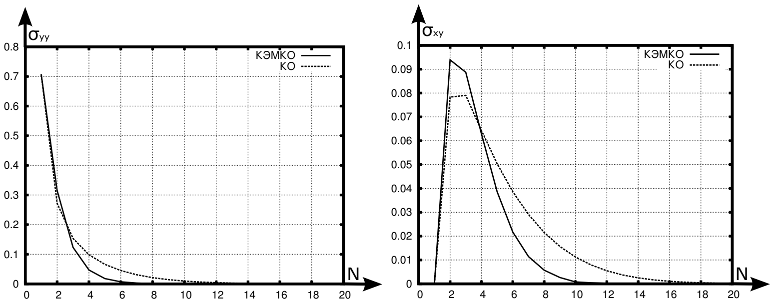


Рис. 2. Геометрия области



(a) Нормальное напряжение σ_{xx} (b) Напряжения на диагонали 20° к оси x

Рис. 3. Распределение давления по пласту



(a) Напряжение σ_{yy} на диагонали 45° к оси x (b) Напряжение σ_{xy} на диагонали 45° к оси x

Рис. 4. Сравнение МКО и КЭМКО

4. Выводы

КЭМКО, триангуляция Делоне, диаграмма Вороного позволяют:

- точно описать геометрию области;
- точно задать начальные и граничные условия;
- произвести быстрый расчет;
- использовать локальные законы сохранения.

Таким образом, в совокупности они создают эффективный аппарат для численного решения задач со сложной геометрией.

Список литературы

[1] Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование. 2002. № 3. С. 14–39.

[2] Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с анг. М.: Мир, 1979. 392 с.

[3] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

[4] Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения. Пер. с нем. М.: Мир, 1988. 344 с.

[5] Киселёв А. П. Элементарная геометрия. М.: Просвещение. 1980.