

## К ОЦЕНКЕ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ<sup>1</sup>

*Лукин С. В., Урманчиев С. Ф.*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** В представленной работе выполнены исследования по распространению акустических импульсов в насыщенных пористых средах с вязкоупругим скелетом. Математическая модель волновых процессов рассмотрена в рамках механики многофазных сред. Приведены оценки для скоростей распространения «быстрой» и «медленной» волн в предельных случаях. Построены поверхности фазовых скоростей и декрементов затухания в зависимости от логарифма безразмерных времен релаксации и частоты. Установлены области интенсивного затухания волн в принятой модели насыщенной пористой среды.

При решении задач, связанных с поиском и разведкой залежей нефти и газа, наиболее часто используется теория распространения упругих волн в пористых средах. Самые первые теоретические исследования в этой области, основанные на осреднении уравнений динамики скелета пористой среды, выполнены в работах [1, 2]. В работе [3] проведён анализ распространения звуковых монохроматических и ударных волн. В монографии [4] получены уравнения многоскоростного движения гетерогенных или многофазных сред различной структуры. В работе [5] про-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3483.2008.1, НШ-4381.2010.1 и гранта РФФИ № 08-01-97033-р\_поволжье\_a

анализировано прохождение волн давления в пористую среду и отражение их от преград. В данной работе проведено исследование фазовых скоростей распространения слабых возмущений в насыщенной пористой среде с учётом нелинейных эффектов, диссипативных и дисперсионных свойств пористой среды и флюида. Рассмотрим плоское одномерное движение двухфазной среды. Нижний индекс  $i = 1$  будем относить к параметрам жидкости, а  $i = 2$  — к параметрам дисперсной фазы (твёрдых частиц). Считаем, что температура фаз в процессе распространения волн давления в чистой жидкости и в пористой среде изменяется незначительно.

Система уравнений движения двухфазной среды записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial x} &= 0, & \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} &= -\alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - F_{12}, \\ \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} &= \alpha_2 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\sigma_{2*}}{\partial x} + F_{12}, \\ \frac{d_2 \sigma_{2*}}{dt} - E_{f*} \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -\frac{1}{t_{20}} (\sigma_{2*} - E_{e*} \epsilon_{2*}), \\ \frac{d_2 \epsilon_{2*}}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial x}, & p_i - p_0 &= C_i^2 (\rho_i^0 - \rho_{i0}^0), & p_2 &= p_1 - \frac{\nu \sigma_{2*}}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p_i$ ,  $v_i$ ,  $\alpha_i$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) — давление, массовая скорость и объёмное содержание  $i$ -й фазы;  $\sigma_{2*}, \epsilon_{2*}$  — эффективное напряжение и деформации в скелете пористой среды;  $\rho_i, \rho_i^0$  — приведённая и истинная плотность  $i$ -й фазы ( $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ );  $C_{20}, \rho_{i0}^0$  — скорость звука и начальная истинная плотность материала  $i$ -й фазы;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E_{f*}$  — модуль упругости, соответствующий мгновенной нагрузке;  $E_{e*}$  — модуль упругости, соответствующий длительной нагрузке на скелет пористой среды;  $D_{f*}, D_{e*}$  — скорости звука в скелете;  $t_{20}$  — время релаксации частиц скелета;  $p_0$  — начальное давление в жидкости;  $\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}$ ;

$F_{12} = F_\mu + F_m + F_B$  — межфазная сила, состоящая из следующих слагаемых [4]:

$$\begin{aligned} F_\mu &= \eta_\mu a_2^{-2} \alpha_1 \alpha_2 \mu_1 (v_1 - v_2), \\ F_m &= \frac{1}{2} \eta_m \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{d_1 v_1}{dt} - \frac{d_2 v_2}{dt} \right), \\ F_B &= \eta_B \alpha_1 \alpha_2 a_2^{-1} \sqrt{\rho_1^0 \pi \mu_1} \int_0^t \left( \frac{d_1 v_1}{d\tau} - \frac{d_2 v_2}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $F_\mu$  — сила трения Стокса;  $F_m$  — сила, связанная с воздействием «присоединённых масс»;  $F_B$  — сила Бассэ–Буссинеска;  $a_2$  — радиус частицы. Коэффициенты  $\eta_\mu$ ,  $\eta_m$  и  $\eta_B$  учитывают влияние формы частиц и структуру среды. Их можно выразить через следующие соотношения [4–6]:

$$\eta_\mu \approx \frac{\alpha_{10} a_{20}^2}{K_0}, \quad \eta_m \approx \frac{1 + \alpha_{10}}{2\alpha_{10}}, \quad \eta_B \approx \frac{a_{20}}{6\alpha_{20}\pi} \sqrt{\frac{10}{\alpha_{10} K_0}}, \quad (3)$$

где  $K_0$  — проницаемость среды. Система уравнений (1) с замыкающими соотношениями (2) полностью описывает движение насыщенной двухфазной среды, при распространении в ней акустических волн. Рассмотрим эволюцию слабых возмущений в пористой среде, насыщенной жидкостью. Для исследования свойств решения системы уравнений движения двухфазной смеси (1), (2) линеаризуем их в системе координат, относительно которой невозмущённая пористая среда покоится  $v_{10} = v_{20} = 0$ . Решение системы будем искать в виде:  $\psi = \Psi \exp(i(\omega t - kx))$ . После несложных преобразований получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} A - i(\rho_{10} + B)\omega + (1 - i)\sqrt{\omega}C & a_{12} & \alpha_{10}ki \\ -A + iB\omega - (1 - i)\sqrt{\omega}C & a_{22} & \alpha_{20}ki \\ -\left(\frac{1}{t_{20} - i\omega}\right) C_{20}^2 \rho_{20}^0 \alpha_{10} \frac{k}{\nu\omega} & m_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= -A + iB\omega - (1 - i)\sqrt{\omega}C, \quad a_{22} = m_{22} + (1 + i)\sqrt{\omega}C, \\
 m_{22} &= A - i(\rho_{20} + B)\omega - \frac{ik^2}{1/t_{20} - i\omega} \left( iE_{f*} - \frac{1}{t_{20}} \frac{E_{e*}}{\omega} \right), \\
 m_{32} &= \left( \frac{E_{e*}}{t_{20}} + (i\omega - 1/t_{20}) \frac{C_{20}^2 \rho_{20}}{\nu} \right) \frac{k}{\omega} - iE_{f*}k, \\
 a_{33} &= \left( \frac{1}{t_{20}} - i\omega \right) \frac{\rho_{20}^0 C_{20}^0}{\nu} \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right), \\
 A &= \eta_{\mu} a_{20}^{-2} \alpha_{10} \alpha_{20} \mu_1, \quad B = 0, 5 \eta_m \rho_{10}^0 \alpha_{10} \alpha_{20}, \\
 C &= \eta_B \alpha_{10} \alpha_{20} \sqrt{\rho_{10}^0 \mu_1 / 2 a_{20}^2}.
 \end{aligned}$$

Из уравнения (4) в предельном случае распространения низкочастотных колебаний в вязкоупругой среде ( $\omega \rightarrow 0$ ) получим значение квадрата равновесной скорости звука:

$$\begin{aligned}
 C_e^2 &= \left( \rho_{20} D_{e*}^2 \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right) - \nu \alpha_{20} \frac{D_{e*}^2}{C_{20}^2} + 1 \right) \times \\
 &\times (\rho_{10} + \rho_{20})^{-1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right)^{-1}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

В полученном выражении определяющую роль играет «длительный» модуль упругости скелета пористой среды  $E_{e*} = \rho_{20} D_{e*}^2$ . Полагая  $T_{20} = 0$ , получаем выражение для равновесной скорости звука, аналогичное (5), но в этом случае упругие свойства скелета пористой среды будут определяться «мгновенным» модулем упругости  $E_{f*} = \rho_{20} D_{f*}^2$ :

$$\begin{aligned}
 C_e^2 &= \left( \rho_{20} D_{f*}^2 \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right) - \nu \alpha_{20} \frac{D_{f*}^2}{C_{20}^2} + 1 \right) \times \\
 &\times (\rho_{10} + \rho_{20})^{-1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right)^{-1}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

В случае отсутствия взаимодействия между частицами скелета, что равносильно  $D_{e*} = 0$  в выражении (5) или  $D_{f*} = 0$  в

выражении (6), мы придём к известному соотношению для равновесной скорости звука в гомогенной смеси:

$$C_e^2 = (\rho_{10} + \rho_{20})^{-1} \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right)^{-1}, \quad (7)$$

совпадающему с формулой, приведённой в монографии Г. Уоллиса [7].

При другом предельном переходе  $\omega \rightarrow 0$  в случае распространения высокочастотных колебаний, на основе уравнения (4), можно показать, что дисперсионное соотношение сводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right) (\rho_{10} \rho_{20} + (\rho_{10} + \rho_{20}) B) C_f^4 - \\ & - \left( A_1 + A_2 - (\alpha_{20} \rho_{10} + 1) \alpha_{20} \nu \frac{D_{f*}^2}{C_{20}^2} B \right) C_f^2 + \alpha_{10}^2 \rho_{20} D_{f*}^2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_1 = (\rho_{10} + B) \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right) \rho_{20} D_{f*}^2$ ;  $A_2 = (\alpha_{10}^2 \rho_{20} + \alpha_{20}^2 \rho_{10})$ ;  $C_f$  — «замороженная» скорость звука в пористой среде, а реологические свойства скелета пористой среды определяются лишь величиной мгновенного модуля упругости.

Рассмотрим случай, когда можно считать межфазные взаимодействия малыми ( $B = 0$ ), тогда для определения «замороженной» скорости звука получаем:

$$C_f^4 - \frac{C_{10}^2(1 + \gamma) + D_{f*}^2(1 + \gamma\lambda^2) - \nu\gamma\lambda^2 D_{f*}^2}{1 + \gamma\lambda^2} C_f^2 + \frac{C_{10}^2 D_{f*}^2}{1 + \gamma\lambda^2} = 0, \quad (9)$$

где  $\gamma = \frac{\alpha_{20} \rho_{10}^0}{\alpha_{10} \rho_{20}^0}$ ;  $\lambda = \frac{C_{10}}{C_{20}}$ . Если контакт между частицами скелета отсутствует, то одна пара решений будет тривиальной, а другая даст значение для квадрата «замороженной» скорости звука в гомогенной смеси:

$$C_f^2 = \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0} \right) \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Причём для абсолютно твёрдых частиц и при  $\alpha_{10} > 10^{-3}$  получим:

$$C_f = C_{10}. \quad (11)$$

То есть в этом случае «замороженная» скорость звука в смеси равна скорости звука во флюиде [4].

При наличии контакта между частицами твёрдой фазы решение уравнения (9) приведёт к равенству:

$$C^{(1)}C^{(2)} = \alpha_{10} \times \left( \frac{\rho_{20} D_{f*}^2}{(\rho_{10}\rho_{20} + B(\rho_{10} + \rho_{20})) \left( \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10}^0 C_{10}^2} + \frac{\alpha_{20}}{\rho_{20}^0 C_{20}^2} \right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где  $C^{(1)}$  и  $C^{(2)}$  — скорости быстрой и медленной волн соответственно. Соотношение (12) в случае отсутствия межфазных взаимодействий ( $B = 0$ ) может быть преобразовано к виду:

$$C^{(1)}C^{(2)} = \frac{C_{10} D_{f*}}{\sqrt{1 + \gamma \lambda^2}}, \quad (13)$$

откуда и следует, что возмущение в насыщенной пористой среде распадается на две волны [1, 2], скорости которых связаны со свойствами фаз уравнением (12). Очевидно, что, основываясь на формуле (13) (или (12) в случае  $B \neq 0$ ), мы придём к следующей оценке для произведения скоростей быстрой и медленной волн:

$$C^{(1)}C^{(2)} \leq C_{10} D_{f*}. \quad (14)$$

Стоит добавить, что при частотах более  $10^4$  Гц различия между правой и левой частью соотношения (13) менее 1%.

Исследуем вязкоупругие свойства скелета на основе дисперсионного соотношения (4). Рассмотрим только тот диапазон частот, который удовлетворяет требованию акустической однородности ( $L \gg a_{20}$ , где  $L$  — длина волны). Параметры фаз возьмем при температуре среды 300 К и давлении  $p_0 = 10^5$  Па.

Для кварца:  $\rho_{20}^0 = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{20} = 3750$  м/с,  $a_{20} = 0,3$  мм,  $D_{f^*} = 1750$  м/с,  $D_{e^*} = 1000$  м/с; для воды  $\rho_{10}^0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_{10} = 1450$  м/с,  $\mu_1 = 10^{-3}$  Па·с,  $\alpha_{10} = 0,4$ . На рис. 1–4 результаты расчётов фазовых скоростей «быстрой» и «медленной» волн и соответствующие им декременты затухания представлены в виде поверхностей, описывающих их зависимости от логарифма приведённых времен релаксации, характеризующих вязкоупругие свойства скелета, и логарифма приведенных частот. Графики фазовых скоростей вычислены для частот от 1 до  $10^{10}$  Гц. На рис. 3, 4 показаны также линии, проходящие через максимальные значения декрементов затухания. Частота и время релаксации частиц скелета обезразмерены относительно времени стоковой релаксации. Требованию акустической однородности удовлетворяют только частоты до  $10^6$  Гц, поэтому следует иметь в виду, что область частот свыше указанного значения не имеет физического смысла. На рис. 1 изображены зависимости фазовой скорости  $C_1$  от частоты для быстрой составляющей волны давления. Фазовая скорость быстрой волны растёт с увеличением времени релаксации, поскольку при этом увеличивается вклад мгновенного модуля упругости. Сильнее всего этот эффект проявляется на высоких частотах, где скорость увеличивается на 15 – 18% при увеличении  $t_{20}$ . На рис. 2 видно, что при частотах от 1 Гц до  $10^3$  Гц изменение времени релаксации существенно влияет и на распространение медленной волны. При малых значениях времени релаксации динамические свойства скелета определяются «длительным» модулем упругости  $E_{e^*}$ , а при больших значениях — «мгновенным» модулем упругости  $E_{f^*}$ . Следовательно, при увеличении  $t_{20}$  фазовые скорости волны будут расти. Как следует из рис. 3, 4 для низких частот влияние времени релаксации на затухание быстрой и медленной волн незначительно. На основании результатов исследований можно сделать вывод, что глубина проникновения высокочастотных акустических волн в пористую среду существенно зависит от времени релаксации скелета пористой среды.

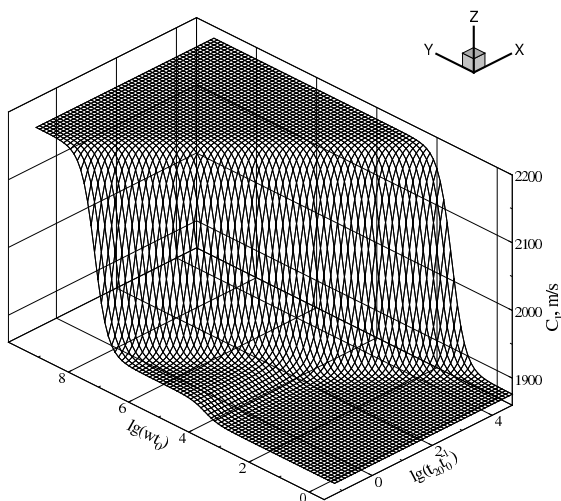


Рис. 1. Фазовая скорость «быстрой» волны в зависимости от логарифма приведённого времени релаксации и логарифма приведенных частот

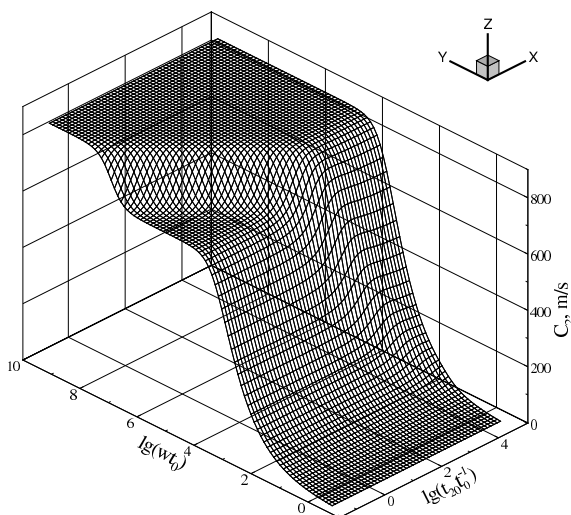


Рис. 2. Фазовая скорость «медленной» волны в зависимости от логарифма приведённого времени релаксации и логарифма приведенных частот



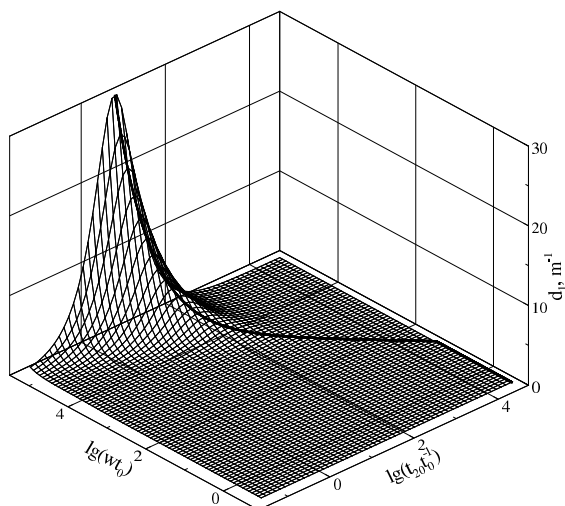


Рис. 3. Декремент затухания «быстрой» волны в зависимости от логарифма приведённого времени релаксации и логарифма приведенных частот

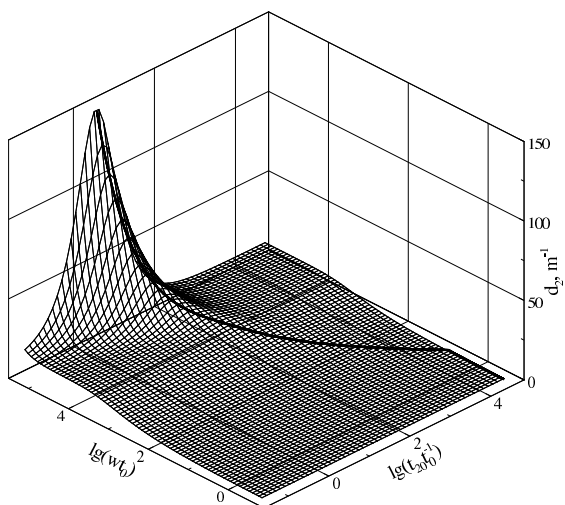


Рис. 4. Декремент затухания «медленной» волны в зависимости от логарифма приведённого времени релаксации и логарифма приведенных частот

## Список литературы

- [1] Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. Географ и геоф. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–150.
- [2] Biot M. A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena // The Journal of Applied Physics. 1954. V. 25. P. 1385–1391.
- [3] Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра. 1970. 336 с.
- [4] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука. 1987. 360 с.
- [5] Губайдуллин А. А., Урманчиев С. Ф. Исследование прохождения волны сжатия из жидкости или газа в насыщенную пористую среду и отражение их от преград // Динамика сплошных сред. Акустика неоднородных сред. Новосибирск. 1992. № 105. С. 122–128.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 736 с.
- [7] Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир. 1972. 440 с.