



ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИК КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ¹

Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш.***

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

**Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В данной работе исследуется осесимметричное течение жидкости с границей, перпендикулярной течению. Аналитически выведены уравнения для радиальной и осевой компонент скорости и давления течения жидкости в трубе конечной длины с подвижной правой границей, а также определены граничные условия на подвижной границе. Получено численное решение задачи на конечно-разностной сетке итерационным методом Ньютона–Рафсона для различных скоростей движения границы.

1. Введение

При исследовании систем управления различными техническими объектами (летательными аппаратами, роботами и т.п.), а также при проектировании многих технических устройств (поршневые насосы, агрегаты дозирования топлива и т.п.), часто возникает задача о движении жидкости около подвижного поршня. Связано это, в первую очередь, с тем, что при движении поршня при определенных значениях параметров существуют режимы, при которых может возникнуть процесс кавитации. Появление кавитации является, как правило, недопустимым при функционировании исследуемого объекта, так как может при-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-97024)

вести к разрушению части или всего объекта. Таким образом, моделирование течения жидкости около подвижной границы с целью выявления и предотвращения таких режимов является актуальной задачей.

В данной работе исследуется осесимметричное течение жидкости с границей, перпендикулярной течению. В отличие от классической задачи обтекания неподвижной границы жидкостью с заданной скоростью на бесконечности [1, 2], в представленной работе рассматривается ограниченная область течения жидкости, где одна из границ является подвижной. Такая геометрия позволяет рассчитать течение жидкости в цилиндре с круглым сечением вблизи критической точки на границе подвижного поршня.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим квазистационарное течение вблизи оси трубы конечной длины. Введем цилиндрические координаты (ρ, φ, z) следующим образом (рис. 1). Плоскость $z = 0$ совместим с началом трубы (считаем, что жидкость втекает в трубу слева). Плоскость $z = z_0$ содержит подвижную стенку (поршень). Ось Oz является осью симметрии, которая расположена перпендикулярно стенке (другими словами, параллельно набегающему на стенку потоку жидкости) в центре трубы. Поскольку задача является осесимметричной, то составляющая скорости в направлении координаты φ , а также все частные производные по этой координате будут равны нулю.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнения Навье–Стокса определяются следующими формулами:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{cases} \quad (1)$$

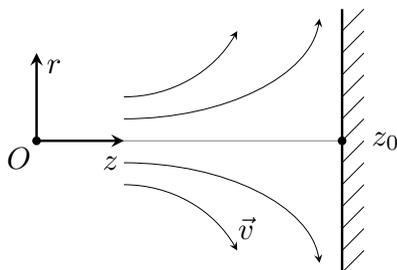


Рис. 1. Осесимметричное течение жидкости с границей, перпендикулярной течению, вблизи оси трубы конечной длины. Течение направлено вдоль оси Oz , труба ограничена плоскостями $z = 0$ и $z = z_0$ (подвижная граница)

где v_r, v_z — радиальная и осевая компоненты скорости v соответственно; ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; p — давление жидкости.

Граничные условия на границе поршня $z = z_0$ задаются следующим образом:

$$v_r = 0, \quad v_z = v_0,$$

где $v_0 = v_0(t)$ — скорость поршня.

Граничные условия вдали от поршня ($z = 0$) для компоненты скорости v_r имеют вид

$$v_r = ar,$$

где a — радиальный градиент скорости на плоскости $z = 0$.

Полагая, что распределение скорости вдоль оси z равно $v_z = -2f(z)$, из уравнения непрерывности (первое уравнение в (1)), получим радиальную компоненту скорости

$$v_r = rf'(z).$$

После подстановки распределения скоростей v_r, v_z в уравнения Навье–Стокса (второе и третье уравнения в (1)), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho(r f'^2 - 2r f f'') = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu r f''', \\ 4\rho f f' = -\frac{\partial p}{\partial z} - 2\mu f''. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение Бернулли для потенциального течения определяет распределение давления следующим образом

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}(v_r^2 + v_z^2 - v_0^2),$$

где p_0 — давление в критической точке $z = z_0$, $r = 0$.

В вязком осесимметричном течении компонента скорости v_z определяется условием прилипания на границе (v_z равна скорости движения границы) и зависит только от координаты z . Таким образом, последнее уравнение может быть переписано в виде

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2}a^2(r^2 + F(z)) - \frac{\rho}{2}v_0^2, \quad (3)$$

где неизвестная функция $F(z)$ находится из уравнения Навье–Стокса и определяет (вместе с функцией $f(z)$) распределение давления вблизи критической точки.

Подставим производные давления (3) в уравнения Навье–Стокса (1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной z :

$$\begin{cases} f'^2 - 2f f'' = a^2 + \nu f''', \\ 2f f' = \frac{a^2}{4}F' - \nu f'', \end{cases} \quad (4)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости.

Граничные условия примут следующий вид:

$$f'(0) = a, \quad f(z_0) = -\frac{1}{2}v_0, \quad f'(z_0) = 0, \quad F(z_0) = \frac{v_0^2}{a^2}. \quad (5)$$

Можно упростить систему уравнений (4), избавившись от констант a и ν с помощью аффинного преобразования [2] следующим образом:

$$z = \sqrt{\frac{\nu}{a}}\xi, \quad f(z) = \sqrt{a\nu}\psi(\xi), \quad F(z) = \frac{\nu}{a}\Psi(\xi).$$

Тогда уравнения (4) примут вид:

$$\begin{cases} \psi''' + 2\psi\psi'' - \psi'^2 + 1 = 0, \\ \psi'' + 2\psi\psi' - \frac{1}{4}\Psi' = 0, \end{cases} \quad (6)$$

а граничные условия (5) преобразуются следующим образом:

$$\psi'(0) = 1, \quad \psi(\xi_0) = -\frac{1}{2}u_0, \quad \psi'(\xi_0) = 0, \quad \Psi(\xi_0) = u_0, \quad (7)$$

где $\xi_0 = \sqrt{a/\nu}z_0$ и $u_0 = v_0/\omega$ — безразмерная скорость движения границы; $\omega = \sqrt{a\nu}$ — характерная радиальная скорость течения.

3. Численные расчеты

Для того чтобы обеспечить сходимость численной схемы решения задачи по определению линий тока жидкости и распределения давления в трубе с подвижным поршнем (полная система уравнений Навье–Стокса), необходимо получить начальное приближенное решение на оси z . В данной работе было получено приближенное (без учета радиальной границы трубы) решение системы уравнений (6) с граничными условиями (7) вблизи критической точки (в центре поверхности поршня). Численная схема была получена методом конечных разностей. Так как первое уравнение (6) зависит только от переменной $\psi(\xi)$, то находилось решение этого уравнения итерационным методом Ньютона–Рафсона [3]. После этого найденное решение для $\psi(\xi)$ подставлялось во второе уравнение (6) и из него выражалась функция Ψ :

$$\Psi' = 4\psi'' + 8\psi\psi'.$$

Решение для Ψ определялось из конечно-разностной схемы итерационным методом Эйлера [3].

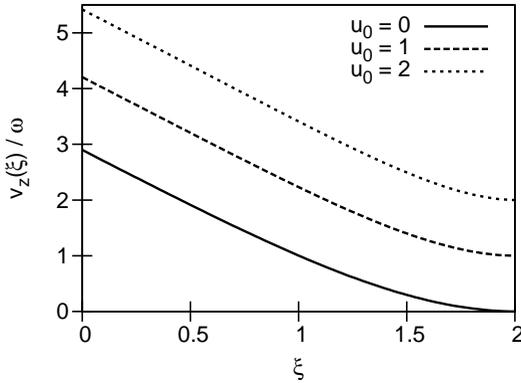


Рис. 2. Зависимость радиальной компоненты $v_z(\xi)/\omega$ скорости на оси $r = 0$ для различных значений скорости движения правой границы u_0

На рис. 2–4 представлены зависимости радиальной $v_z(\xi)/\omega$ и осевой $v_r(\xi)/v_r(0)$ компонент скорости на оси $r = 0$ и функции давления $\Psi(\xi)$ для различных значений скорости движения правой границы. Из рис. 2 видно, что радиальная компонента скорости меняется линейно относительно скорости движения границы.

Скорость вдоль оси нелинейно зависит от скорости движения границы и имеет приграничную область (рис. 3). Величина приграничного слоя $\delta = z_1 \sqrt{\eta/a}$, в котором заметно влияние перпендикулярной границы (поршня) на осевую скорость, характеризуется параметром $z_1 \approx 1.8$, определяющим расстояние от границы z_0 . С ростом скорости движения границы v_0 величина z_1 уменьшается.

В отличие от случая пуазейлевского течения в трубе зависимость перепада давления Ψ вдоль оси z в рассматриваемой задаче не является линейной. Вблизи критической точки z_0 поведение перепада давления близко к линейному $\Psi' \approx \text{const}$, но, чем дальше от границы, тем сильнее меняется производная Ψ' по абсолютной величине. Это указывает на необходимость учитывать нелинейность перепада давления вдоль оси при решении полной системы уравнений Навье–Стокса (в отличие от пуазейлевского

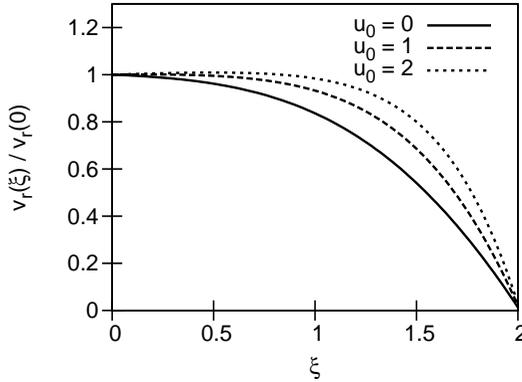


Рис. 3. Зависимость осевой компоненты $v_r(\xi)/v_r(0)$ скорости на оси $r = 0$ для различных значений скорости движения правой границы u_0

течения, когда градиент давления можно заменить константой).

Отметим, что полученное решение справедливо лишь вблизи оси z и не удовлетворяет осевым граничным условиям $r = R$ (условие прилипания на стенках трубы):

$$v_r(r = R) = 0, \quad v_z(r = R) = 0.$$

Решение для компоненты скорости v_z для течения Хагена–Пуазейля в трубе имеет вид

$$v_z(z) = bg(z),$$

где величина $b = \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}$ и функция $g(z) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$. Используя функцию $g(z)$ как множитель для решения v_z вблизи оси, мы получим адекватное приближенное решение, удовлетворяющее граничным условиям как на оси $r = 0$, так и на стенке трубы $r = R$:

$$v_z(z) \rightarrow g(z) \cdot v_z(z). \quad (8)$$

В заключение определим неизвестные параметры ω^2 и a через заданный перепад давления $\Delta p = p_1 - p_0$, где p_1 — давление в

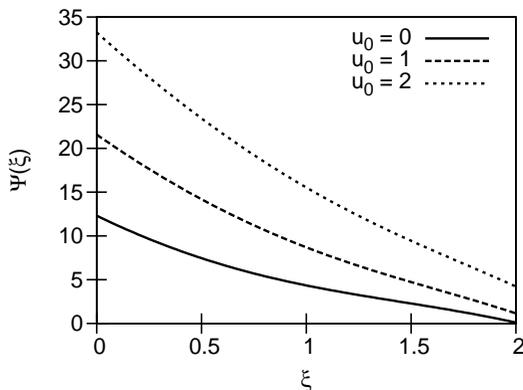


Рис. 4. Зависимость функции давления $\Psi(\xi)$ на оси $r = 0$ для различных значений скорости движения правой границы u_0

сечения $z = 0$, и заданную скорость движения поршня v_0 . Из уравнения (3) на оси $r = 0$ получим

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}(\omega^2 \Psi - v_0^2).$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \left[\frac{2\Delta p}{\rho} + v_0^2 \right] / \Psi|_{z=0}.$$

С учетом того, что $\omega^2 = a\nu$, мы можем определить и параметр a :

$$a = \frac{1}{\nu \Psi|_{z=0}} \left[\frac{2\Delta p}{\rho} + v_0^2 \right]. \tag{9}$$

Результаты представленного моделирования можно использовать в качестве начального приближения для расчетов течения топлива в трубе с подвижным поршнем в гидромеханических исполнительных механизмах (решение системы (1)). Для этого нужно задать значения давлений: p_1 — давление в соседнем элементе с трубой, содержащей поршень, и p_0 — давление на границе поршня; определить по формуле (9) значение параметра a ; получить численное решение системы уравнений (5) для

переменных $f(z)$ и $\Psi(z)$; использовать для полученных решений преобразование (8).

4. Заключение

В данной работе аналитически выведены уравнения для радиальной и осевой компонент скорости и давления течения жидкости в трубе конечной длины с подвижной правой границей. Определены граничные условия на подвижной границе. Получено численное решение задачи на конечно-разностной сетке итерационным методом Ньютона–Рафсона для различных скоростей движения границы.

Полученное распределение скоростей и давления можно использовать в качестве начального приближения вблизи оси для численной схемы расчета течения топлива в трубе с подвижным поршнем в гидромеханических исполнительных механизмах, например, в агрегате дозирования топлива в силовую установку беспилотного летательного аппарата [4], а также для оценки изменения давления, вызываемого течением жидкости вблизи подвижной границы поршня.

Список литературы

- [1] Homann F., Der Einfluß großer Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel, Z. Angew. Math. Mech. 16, 153 (1936).
- [2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 771 с.
- [3] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [4] Денисова Е. В., Насибуллаева Э. Ш. Моделирование задачи функционирования гидромеханического исполнительного механизма // Труды международной научной конференции ПАВТ'2010. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. С. 462–468.