УДК 534.113

Диагностика повреждений вала с маховиком[1]

Хакимов А. Г.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. По трем собственным частотам крутильных колебаний определяются место и размеры поперечного надреза вала с маховиком.

В случае стержня конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот изгибных колебаний [1] или изменение частоты собственных продольных колебаний [2]. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных бегущих волнах в стержнях конечной длины посвящена работа [4].

Рассматривается напряженно-деформированное состояние вала, закрепленного верхним концом на упругой опоре с жесткостью на кручение c_1 и маховиком на другом конце с моментом инерции J_1 (рис. 1). Предполагается, что на валу имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез моделирует ее повреждение, в частности, повреждение типа раскрытой трещины. Рассматривается только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для вала. Поскольку трещина появля-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-97008-р_поволжье_а)

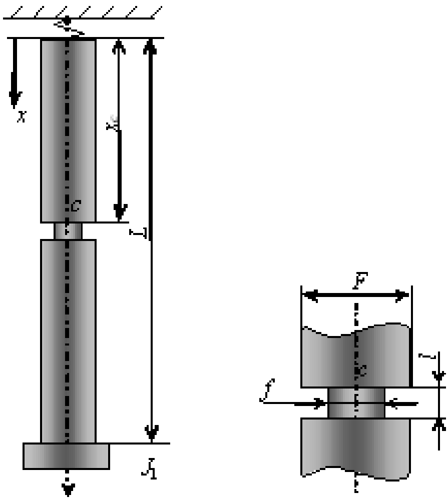

Рис. 1

ется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что надрез может быть в любом месте по длине вала. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L, J_p длину и полярный момент инерции поперечного сечения вала; G, ρ — модуль сдвига, плотность; через l, $\tilde{J}_p$ — длину и полярный момент инерции поперечного сечения надреза; x_c — его координату; ϕ, M — угол поворота и крутящий момент в сечении вала. Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость:

$$M = GJ_p\theta, \quad \theta = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем:

$$G\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

$$M = GJ_p \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия:

$$M = \mathrm{c}_1 \phi \ \ (x = 0), \quad M = -J_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \ \ (x = L).$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [5]. Рассматриваем динамическую задачу [2]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_p \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1}$$

$$M = \mathrm{c}_1 \phi \ \ (x = 0), \quad M = -J_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \ \ (x = L). \tag{2}$$

Обозначая функции в областях $0 \le x \le x_c$, $x_c \le x \le x_c + l$, $x_c + l \le x \le L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства усилий и перемещений):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = m \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad \phi_1 = \phi_2, \quad (x = x_c), \tag{3}$$

$$m \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x}, \quad \phi_2 = \phi_3, \quad (x = x_c + l), \quad m = \frac{\tilde{J}_p}{J_p}. \tag{4}$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c, длина надреза l и параметр m. В прямой задаче координата надреза x_c, его длина l и параметр m известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (1) имеет вид

$$\phi = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega / a, \ a^2 = G / \rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \le x \le x_c$, $x_c \le x \le x_{cl}$ и $x_{cl} \le x \le L$ ($x_{cl} = x_c + l$), определяются из шести граничных условий (2)–(4). Для того, чтобы A_i, B_i ($i = 1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \tag{5}$$

где ненулевые элементы определителя записываются в виде:

$$\begin{gathered}
a_{11} = -q,\ a_{12} = 1,\ a_{25} = \sin(\alpha L) + p\cos(\alpha L),\\
a_{26} = -\cos(\alpha L) + p\sin(\alpha L),\ a_{31} = \sin(\alpha x_c),\ a_{32} = -\cos(\alpha x_c),\\
a_{33} = -m\sin(\alpha x_c),\ a_{34} = m\cos(\alpha x_c),\ a_{41} = \cos(\alpha x_c),\\
a_{42} = \sin(\alpha x_c),\ a_{43} = -\cos(\alpha x_c),\ a_{44} = -\sin(\alpha x_c),\\
a_{53} = m\sin(\alpha x_{cl}),\ a_{54} = -m\cos(\alpha x_{cl}),\ a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}),\\
a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}),\ a_{63} = \cos(\alpha x_{cl}),\ a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}),\\
a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}),\ a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}),
\end{gathered}$$

где

$$p = \frac{J_1\omega^2}{GJ_p\alpha}, \quad q = \frac{c_1}{GJ_p\alpha}.$$

Условие (5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Если коэффициент $c_1 = 0$, то частотное уравнение упрощается. Дополнительно, применяя следующие соотношения для малых αl:

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l\cos(\alpha x_c),\ \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l\sin(\alpha x_c),$$

и пренебрегая $(\alpha l)^2$, получим

$$\begin{gathered}
m^2\left(\cos(\alpha L)\cos^2(\alpha x_c) + \sin(\alpha L)\sin(\alpha x_c)\cos(\alpha x_c)\right) +\\
+m^2 p\left(p\cos(\alpha L)\sin(\alpha x_c)\cos(\alpha x_c) - \sin(\alpha L)\cos^2(\alpha x_c)\right) +\\
+m\left[\frac{p\cos(\alpha L) + \sin(\alpha L)}{\alpha l} - \cos(\alpha L) + p\sin(\alpha L)\right] -\\
-p\left(\sin(\alpha L)\sin^2(\alpha x_c) + \cos(\alpha L)\sin(\alpha x_c)\cos(\alpha x_c)\right) +\\
+\cos(\alpha L)\sin^2(\alpha x_c) - \sin(\alpha L)\sin(\alpha x_c)\cos(\alpha x_c) = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для вала без надреза ($\alpha l = 0$) и без маховика из уравнения (6) следует, что $\sin \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [2] $\alpha L = k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$) или $\omega_k = k\pi a/L$.

Для определения m, l и x_c необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с надрезом. Такое исследование выполнено для изгибных колебаний балки в работах [7].

Прямая задача. Решение уравнения (6) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м^3, $a = 3141.9$ м/с, $L = 3$ м, $J_p = 9.817 \cdot 10^{-6}$ м^4 (диаметр вала 100 мм), $J_1 = 16$ кгм^2, $c_1 = 0$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты вала без надреза и без маховика $\omega_1 = 3290.2332$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 6580.4664$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 9870.6997$ с$^{-1}$. Для вала без надреза и с маховиком $\omega_1 = 1654.6343$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 4938.5387$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 8227.4971$ с$^{-1}$. Для вала с надрезом при $x_c = 1$ м, $m = 0.2$, $l = 0.02$ м и с маховиком решение прямой задачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний вала $\omega_1 = 1650.087957$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 4810.479030$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 8206.529986$ с$^{-1}$. На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1, ω_2, ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $m = 0.1$ и различных l (в м). Эти зависимости имеют периодический характер. На рис. 3 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1, ω_2, ω_3 от параметра m для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных l (в м). На рис. 4 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1, ω_2, ω_3 от от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных значений параметра m.

Обратная задача. Если частотное уравнение (6) записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза x_c, его длина l и параметр m. Например, для круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1 = 1648$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 4810$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 8206$ с$^{-1}$ решение обратной задачи дает, что вал имеет надрез при $x_c = 1.015$ м, $m = 0.148$, $l = 0.014$ м. На рис. 5 приводятся зависимости координаты надреза x_c, его длины l и па-

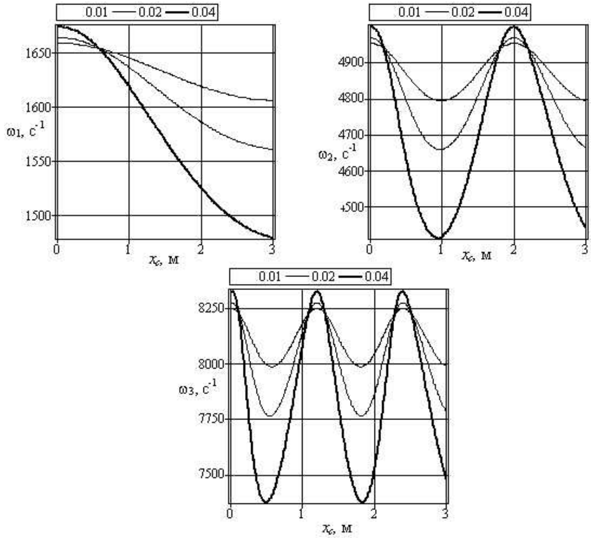

Рис. 2. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от координаты надреза x_c для параметра $m = 0.1$ и различных l (в м)

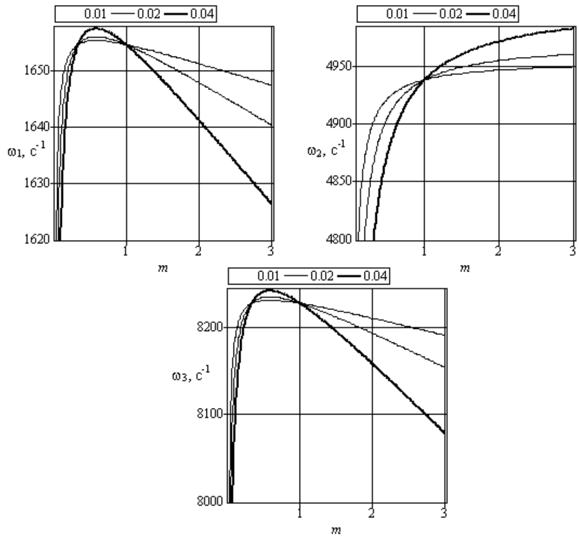

Рис. 3. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1, ω_2, ω_3 от параметра m для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных l (в м)

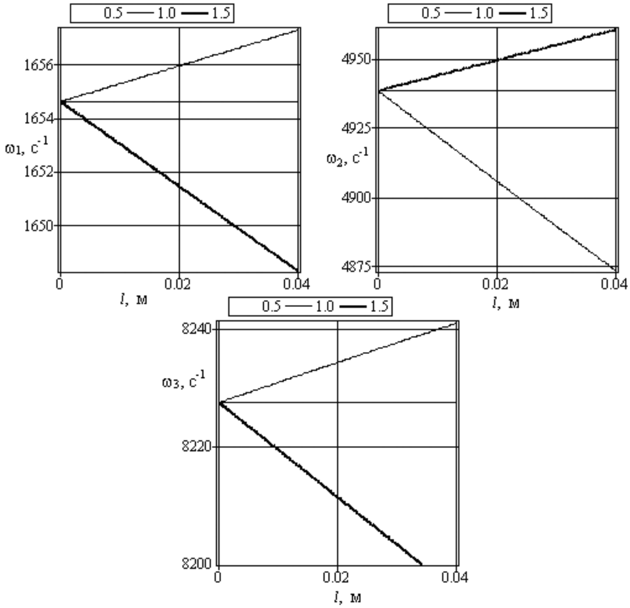

Рис. 4. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 1$ м и различных значений параметра m

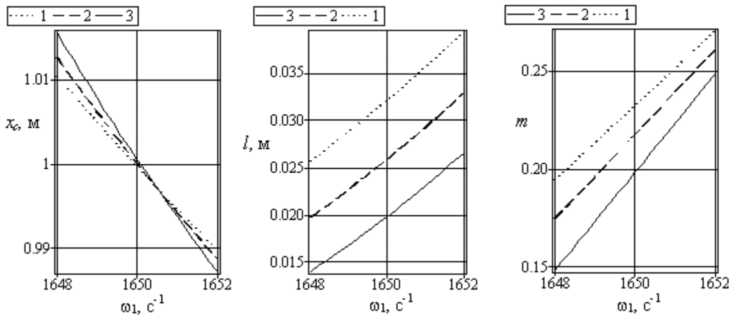

Рис. 5. Зависимости координаты надреза x_c, его длины l и параметра m от круговой частоты крутильных колебаний вала ω_1

раметра m от круговых частот крутильных колебаний вала ω_1, для $\omega_2 = 4770$ с$^{-1}$ (1), $\omega_2 = 4790$ с$^{-1}$ (2), $\omega_2 = 4810$ с$^{-1}$ (3), $\omega_3 = 8206.53$с$^{-1}$.

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных крутильных колебаний можно определить координату надреза x_c, его длину l и параметр надреза m.

Список литературы

[1] Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Электронный журнал «Техническая акустика», http://ejta.org 2005, 5.

[2] Ильгамов М. А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5 // Уфа: Гилем. 2007. С. 201–211.

[3] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

[4] Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.

[5] Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 450 с.

[6] Разянцев А. О. Виброакустическая диагностика глубиннонасосных штанг в процессе эксплуатации. Диссертация к.т.н. Уфа: УГНТУ, 1999. 108 с.

[7] Окрушко Е. И., Ураксеев М. А. Дефектоскопия глубиннонасосных штанг. М.: Недра, 1983. 112 с.