



НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ¹

Волкова Е. В.^{,**}, Насибуллаева Э. Ш.^{*,**}*

**Институт механики УНЦ РАН, Уфа*

***Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем»,
БашГУ, Уфа*

Аннотация. В данной работе рассматривается динамика одиночного газового пузырька под действием акустического поля с учетом массопереноса через подвижную стенку пузырька. Массоперенос рассчитывается отдельно в постановке задачи диффузии. Вследствие изменения давления внутри пузырька за счет колебаний его объема, концентрация растворенного в жидкости газа на границе с пузырьком претерпевает колебания большой амплитуды. Для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной областью, уравнения конвекции–диффузии, описывающие перенос газа, растворенного в жидкости, записаны в лагранжевых координатах.

1. Введение

Акустические волны в жидкостях вызывают появление, рост, коллапс газовых или паровых пузырьков. Если амплитуда звукового давления превосходит некоторое критическое значение, то в фазе разрежения звуковой волны создаётся такое низкое давление, что сплошность жидкости нарушается и образуются пузырьки. В данной работе рассмотрена динамика одиночного пузырька в акустическом поле, а также выполнен начальный этап решения задачи диффузии.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (11.G34.31.0040))

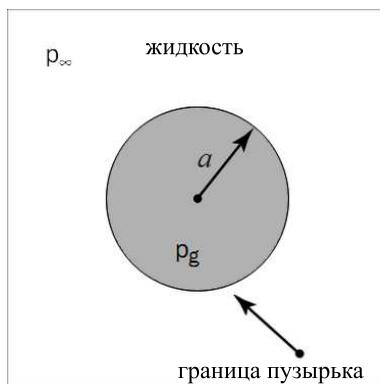


Рис. 1. Схематическое представление сферического пузырька в бесконечном объеме жидкости

2. Постановка задачи

Рассмотрен сферически-симметричный парогазовый пузырек в изотропном поле давления. Моделирование задачи основывалось на следующих допущениях: отсутствует теплообмен в жидкости; изменение размеров пузырька за период колебания происходит за счет диффузии; разница между скоростью жидкости на поверхности и скоростью изменения радиуса пузырька считается незначительной для уравнения Келлера–Миксиса; фазовые переходы не влияют на нормальную компоненту тензора напряжений на поверхности пузырька.

В невозмущенном начальном состоянии выражения для давления, плотности и массы газа следующие (рис. 1):

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_{g0}}{R_g T_0}, \quad m_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0},$$

где a — радиус пузырька; ρ_g — плотность газа; p_g — давление газа в пузырьке; m_g — масса газа в пузырьке; σ — поверхностное натяжение; R_g — универсальная газовая постоянная; T — температура окружающей жидкости. Индекс «0» обозначает значение величины в начальный момент времени.

Одиночный газовый пузырек в бесконечной несжимаемой жидкости с растворенным газом в отсутствии внешнего акустического поля неустойчив, так как давление внутри пузырька больше давления в жидкости и, следовательно, пузырек будет медленно растворяться из-за диффузии газа из пузырька в окружающую жидкость и со временем исчезнет [1]. Если же поместить пузырек в акустическое поле, изменяющееся по закону синуса, $p_\infty = -A \sin \omega t$, где p_∞ — давление в жидкости вдали от пузырька; A — амплитуда звукового давления; ω — круговая частота, то это вызовет колебания пузырька, причем во время расширения будет происходить диффузия газа из жидкости в пузырек, а во время сжатия — наоборот. Этот процесс называется «направленной» диффузией. За полный период колебания диффузия должна приводить к росту пузырька. Предполагается, что длина волны звукового давления во много раз превышает размеры пузырька $\omega a \ll C$, где C — скорость звука в жидкости.

Скорость переноса массы через подвижную границу пузырька определяется через градиент концентрации газа c_l по следующей формуле

$$\dot{m}_g = 4\pi a^2 \rho_l D \left. \frac{\partial c_l}{\partial r} \right|_{r=a},$$

где ρ_l — плотность жидкости; D — коэффициент диффузии; r — сферическая координата. Полагая поведение пузырька политропным, получим уравнение для давления газа p_g в пузырьке

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^\gamma = \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right)^\gamma \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}.$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

При квазиизотермических условиях масса газа меняется очень медленно. В этом случае справедливо

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left(\frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}.$$

Динамика пузырька описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением Келлера–Миксиса [2]

$$\left(1 - \frac{\dot{a}}{C}\right) a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3C}\right) = \left(1 + \frac{\dot{a}}{C}\right) \frac{P}{\rho_l} + \frac{a}{\rho_l C} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1)$$

в котором

$$P = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma} - p_0 - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu}{a}\dot{a} - p_\infty,$$

где μ — кинематическая вязкость жидкости.

Начальные условия: $a(0) = a_0$, $\dot{a}(0) = 0$. Уравнение конвекции–диффузии растворенного газа в жидкости в сферических координатах представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \frac{\partial c}{\partial r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad c|_{r=\infty} = c_\infty, \quad c|_{r=a} = c_a.$$

где c — массовая концентрация газа, растворенного в жидкости; $\frac{a^2 \dot{a}}{r^2}$ — радиальное поле скорости; радиус пузырька a — функция от времени t . Поле скорости в жидкости зависит от времени, пространственно неоднородно и возникает в области с подвижной границей.

3. Численное решение

Задача решалась численно и разбита на два этапа: исследование динамики пузырька в акустическом поле и решение задачи диффузии.

Численное исследование уравнения Келлера–Миксиса (1) осуществлялось в среде Matlab с помощью метода Дормана–Принса восьмого порядка точности [4]. Также для проверки решения использовалась встроенная процедура Matlab ode45 для решения ОДУ методом Рунге–Кутты 4–5 порядка точности.

Задача диффузии решалась с использованием схемы Кранка–Николсона. Для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной границей, по аналогии с [1] задача рассмотрена

в лагранжевых координатах. Граница зафиксирована с помощью переменной Лагранжа ζ :

$$\zeta = r^3 - a^3, \quad r = (\zeta + a^3)^{1/3}.$$

После обозначения

$$\tilde{c} = c - c_\infty, \quad \tilde{c}_a = c_a - c_\infty$$

и введения новой переменной для обозначения времени

$$\tau(t) = 9D \int_0^t a^4(t') dt', \quad \tau(0) = 0,$$

получено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa(\zeta, \tau) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right],$$

$$u_{\zeta=\zeta_c} = 0, \quad u_{\zeta=0} = u_a, \quad u_{\tau=0} = 0,$$

где $\kappa(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\zeta}{a^3}\right)^{4/3}$, $u = \tilde{c}$, a и \tilde{c}_a являются функциями от времени τ .

Граница может быть установлена для некоторой конечной $\zeta = \zeta_c$, поскольку решение задачи исчезает при $\zeta \rightarrow \infty$. Обозначим шаг по времени h_τ и пространству h_ζ . Если ввести:

$$\tau_n = nh_\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\zeta_m = mh_\zeta, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$u_m^n = u(\zeta_m, \tau_n),$$

$$\kappa_m^n = \kappa(\zeta_m, \tau_n),$$

$$f_m^n = f(\zeta_m, \tau_n),$$

и заменить исходные уравнения дискретным аналогом, используя центральные разности по пространству, можно получить

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_\tau} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa^{n+1}(\zeta) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \zeta} \right] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\kappa^n(\zeta) \frac{\partial u^n}{\partial \zeta} \right] \right\}.$$

После того, как все неизвестные собраны в левой части, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^{(n+1)} &= [\kappa^{n+1} (\zeta_{m+1/2}) (u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}) - \\ &\quad - \kappa^{n+1} (\zeta_{m-1/2}) (u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})], \\ A^{(n)} &= [\kappa^n (\zeta_{m+1/2}) (u_{m+1}^n - u_m^n) - \\ &\quad - \kappa^n (\zeta_{m-1/2}) (u_m^n - u_{m-1}^n)]. \end{aligned}$$

Получим

$$u_m^{n+1} - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} A^{(n+1)} = u_m^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} A^{(n)},$$

дискретное уравнение может быть записано в следующем виде

$$\left(I - \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} B_{n+1} \right) X^{n+1} = \left(I + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} B_n \right) X^n + \frac{h_\tau}{2h_\zeta^2} (F^{n+1} + F^n).$$

где B_n — симметричная разреженная матрица, состоящая из коэффициентов κ , размером $(M-1) \times (M-1)$. Вектор решений X^n и силовой вектор F^n :

$$X^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \dots \\ u_{M-1}^n \end{pmatrix}, \quad F^n = \begin{pmatrix} \kappa_{-1/2}^n u_a \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы использовался метод прогонки [5].

4. Результаты численного моделирования

Для проверки правильности вычислений в задаче о динамике пузырька авторами использовалась работа [2], поэтому результаты получены для пузырьков газа в воде при температуре 20°C и следующих параметрах: показатель адиабаты $\gamma = 1.4$, $\sigma = 0.0725 \text{ Н/м}$, $p_0 = 1 \text{ бар}$, $C = 1500 \text{ м/с}$, частота $\omega = 2\pi \cdot 20 \text{ кГц}$.

На рис. 2 показано изменение давления звукового поля за один период.

На рис. 3 представлено изменение радиуса пузырька в зависимости от безразмерного времени (за один период акустического поля) при начальных радиусах $a_0 = 1$ мкм и $a_0 = 1.5$ мкм. В первом случае пузырек осциллирует с малой амплитудой из-за относительно большого давления поверхностного натяжения. Для второго случая наблюдаются нелинейные колебания большой амплитуды. Аналогичные результаты при данных параметрах были получены в работе [2].

Также обнаружено хорошее соответствие результатов вычислений со встроенной процедурой Matlab для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Порядок аппроксимации реализованного алгоритма Дормана–Принса превышает порядок аппроксимации встроенной функции Matlab для решения систем ОДУ.

Задача диффузии решалась при следующих параметрах: $h_\zeta = L/M - 1$, $M = 100$, $L = 1$, $u_a = 1$, $N_{step} = 300$, $h_\tau = 10^{-5}$. Для возможности сравнения результатов численного решения с аналитическим положили $k[\zeta, \tau] = \text{const} = 1$, что позволило сделать задачу линейной. Для такого случая существует аналитическое решение

$$u(\zeta, \tau) = 1 - u_a \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

На рис. 4 показано распределение концентрации газа по пространству (рис. 4(a)) и времени (рис. 4(b)). При заданных параметрах абсолютная ошибка в сравнении с аналитическим решением составляет 10^{-2} .

5. Заключение

С помощью Matlab численно реализован алгоритм Дормана–Принса для расчета нелинейной динамики пузырька. Получено хорошее соответствие результатов вычислений со встроенной

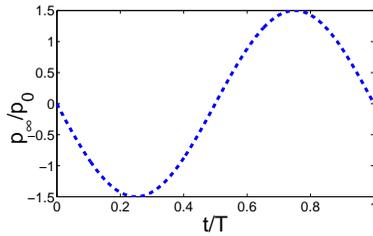


Рис. 2. Акустическое поле $p_\infty = -A \sin \omega t$. при $A = 1.5$ бар

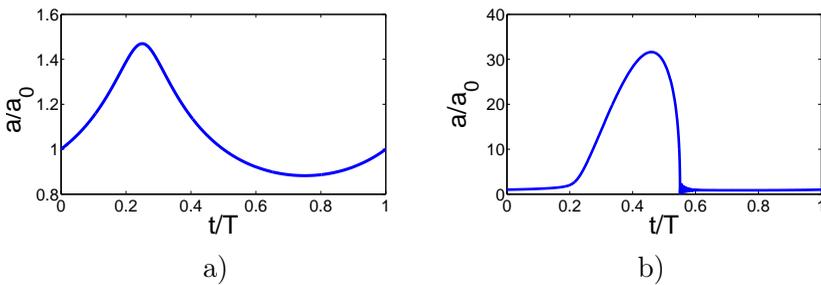


Рис. 3. Динамика безразмерного радиуса пузырька при $a_0 = 1$ микрон (а), $a_0 = 1.5$ микрон (б)

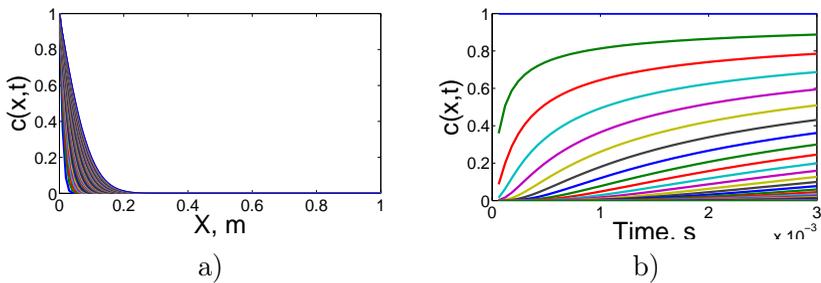


Рис. 4. Распределение концентрации газа $c(x, t)$, растворенного в жидкости, по пространству (а) и времени (б)

процедурой Matlab для решения ОДУ. Порядок аппроксимации реализованного алгоритма превышает порядок аппроксимации встроенной функции Matlab для решения систем ОДУ.

Проведен начальный этап решения задачи о влиянии направленной диффузии на динамику пузырька. Численно реализована задача с постоянным коэффициентом диффузии. Сравнение с аналитическим решением показывает хорошее соответствие.

Для дальнейшего исследования необходимо решение задачи с нелинейной зависимостью коэффициента диффузии, а также расчет радиуса пузырька под влиянием направленной диффузии.

Авторы выражают благодарность за помощь при постановке задачи Ахатову И. Ш и Гумерову Н. А.

Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Исследование диффузионной устойчивости пузырьков в кластере // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Vol. 48, № 4. С. 40–48.
- [2] I. Akhatov, N. Gumerov, C. D. Ohl, U. Parlitz, W. Lauterborn. The Role of Surface Tension in Stable Single-Bubble Sonoluminescence // Physical Review Letters. 1997. Vol. 78, № 2. Pp. 227–230.
- [3] Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [4] Marios M. Fyrillas, Andrew J. Szeri. Dissolution or growth of soluble spherical bubble // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 277. Pp. 381–407.
- [5] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.