УДК 532.529.5;544.773.33

Движение эмульсии в переходной зоне трубка–капилляр[1]

Хабиров С. В.[*,**], *Ахметов А. Т.*[*,***]
[*]Институт механики УНЦ РАН, Уфа
[**]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа
[***]Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, Уфа

Аннотация. На основе опытных данных описано движение эмульсии при входе в капилляр. В области максимальных градиентов давления происходит деформация капель воды, что вызывает упругие напряжения капель воды, сдерживающие поток. Приведена математическая модель перехода от течения вязкой жидкости к вязко-упругому движению, а от него к фильтрационному движению внутри эмульсии. Рассмотрено квазистационарное движение вязкой жидкости возле капилляра, по которому можно определить линию тока.

1. Общие представления о движении эмульсии

В работе рассматривается концентрированная обратная водонефтяная эмульсия: микрокапли воды — дисперсная фаза (76%) в растворе нефти (20%) с поверхностно активным веществом (ПАВ, 4%) — дисперсионная (несущая) фаза (24%). Размеры микрокапель 0.2–1 мкм, длина молекул ПАВ ~ 3 нкм, они хаотично расположены в растворе; часть из них на границе раздела фаз — поверхностях капелек воды ориентированы перпендикулярно к поверхности. Гидродинамическая система состоит из

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 11.G.34.31.0042 правительства РФ по постановлению № 220, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ–4381.2010.1 и грантов РФФИ №№ 11-01-0026-а, 11-01-00147-а

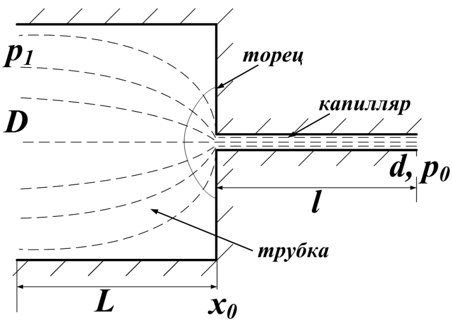

Рис. 1. Схематичное изображение переходной зоны трубка–капилляр

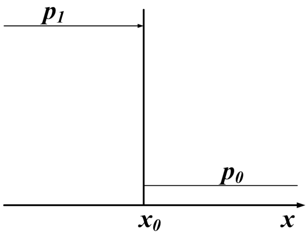

Рис. 2. Начальное распределение давления

полиэтиленовых трубок с внутренним диаметром 3 мм, которые через трубку с внутренним диаметром (D) 1,5 мм соединяются со стеклянным капилляром с внешним диаметром 1,5 мм и внутренним (d) 100 мкм. Эмульсия из трубки большого диаметра D перетекает в капилляр малого диаметра d (рис. 1) под действием перепада давления $\Delta p = p_1 - p_0$.

В начальный момент скорость отсутствует $v = 0$, распределение давления скачкообразно (рис. 2). С течением времени в капилляре устанавливается распределение скоростей и давлений согласно закону Дарси, в трубке по закону течения вязкой жидкости (эмульсии) возле входа в капилляр возникает переходная зона, в которой проявляются упругие свойства капель (деформация формы), фильтрация нефти относительно капель и частич-

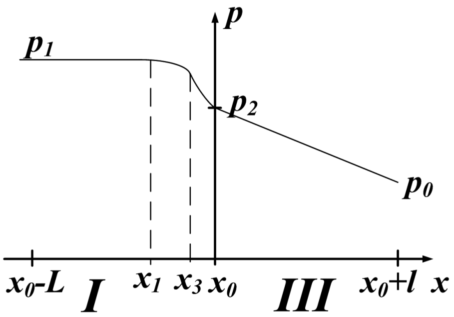

Рис. 3. Распределение давления вдоль трубки тока для малых времён

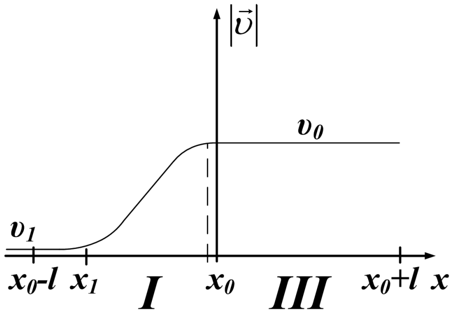

Рис. 4. Изменение скоростей в трубке тока для малых времён

ное объединение (коалесценция) капель (фазовый переход). На капли действует сила реакции торца. Ей противодействует капиллярное давление, которое зависит от концентрации ПАВ на поверхности капли.

Предполагаемое распределение давления и скорости вдоль трубки тока для малых времён приведено на рис. 3–4 , где p_2 — давление у входа в капилляр; x — длина линии тока в трубке; x_0 — положение границы между трубкой и капилляром, где $v_0 = (D/d)^2 v_1$.

Для больших времён x_3 — точка максимального градиен-

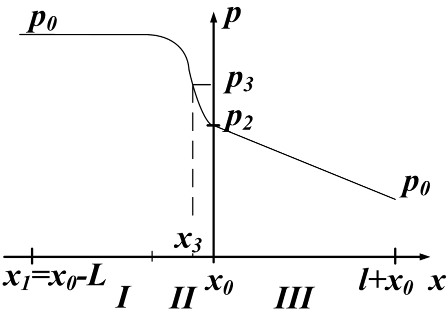

Рис. 5. Распределение давления вдоль трубки тока для больших времён

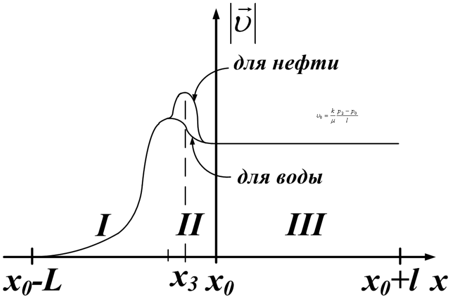

Рис. 6. Изменение скоростей в трубке тока для больших времён

та давления, где наиболее вероятен переход к фильтрации и «фазовый переход» (рис. 5–6), то есть появляется относительная скорость компонент эмульсии и деформируются капли воды. Эмульсия, как однородная жидкость, находится до положения x_3.

2. Математическая модель движения эмульсии

Движение эмульсии во все времена изотермическое и изохорическое [1]: $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, $c = c_0 = \mathrm{const}$ — концентрация ПАВ,

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \mathrm{div}P,\ \ \frac{de}{dt} = P : D,\ \ D = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right)^T\right),$$

e — внутренняя энергия; P — тензор напряжений.

Плотность ρ, температура T, а значит, свободная энергия $e - TS = F_0$ постоянны.

При малых градиентах давления $|\nabla p| < p_0$ (зона I) тензор напряжения выражается формулой

$$P = -pI + 2\rho\nu D.$$

При больших градиентах давления $|\nabla p| \geq p_0$ (зона II) проявляются упругие свойства эмульсии

$$P = (-p + \lambda\mathrm{tr}\xi)I + 2\rho\nu D + 2\mu\xi,\ \ \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}}\right)^T\right),$$

где ν, μ, λ — функции концентраций ПАВ;

$$\vec{u_t} = \vec{v},\ \xi_t = D + \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}\right)^T\xi + \xi\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} \sim D \Rightarrow \mathrm{tr}\xi = 0.$$

В фильтрационной зоне III, которая может начинаться с «фазовой границы» Γ (деформация капель) $h(t,\vec{x}) = 0$ $(x = x_3(t))$, действует закон фильтрации [2]:

$$\vec{v_i} = -\frac{k}{\mu_i}f_i(s)\left(\nabla p_i - \vec{b_i}\right),\ \ i = \text{н}, \text{в}(\text{нефть, вода}),$$
$$s = s_\text{в},\ s_\text{н} + s_\text{в} = 1,\ p_\text{в} - p_\text{н} = \sigma(c)\sqrt{\frac{1}{k}}\cos\theta J(s),$$
$$s_{it} + \mathrm{div}\vec{v_i} = 0,\ c_{it} + \vec{v_\text{н}}\cdot\nabla c = \nabla(d\nabla c),$$

где $s_\text{н}$ и $s_\text{в}$ — насыщенность нефти и воды; θ — угол смачивания нефти на воде; $\sigma(c)$ — поверхностное натяжение (рис. 7); k — проницаемость; $J(s)$ — функция Лаварета; d — коэффициент диффузии; $\vec{b_i}$ — минимальное значение градиента давления, когда фильтрация прекращается (кроме диффузии); $\mu_i(s_i)$ — вязкости; $f_i(s)$ — относительные проницаемости.

Фазовая граница Г: $\vec{h}(t,\vec{x}) = 0$ имеет максимальный градиент давления эмульсии $\nabla p = \max$. Здесь капли среднего радиуса r_0 становятся больше $r_* > r_0$ и деформируются, вызывая увеличение поверхностного натяжения, которое сдерживает большее давление воды в капле. Это давление компенсируется реакцией между каплями и торцом. При этом сила трения между каплями увеличивается $F_{\text{тр}} = \mu_{\text{н}}(\text{c})N$, $N = p_3 S_{\text{к}}$, где $S_{\text{к}}$ — площадь конической части капли (рис. 8, 9).

Пусть $\vec{n} = \dfrac{\nabla h}{|\nabla h|}$ нормаль фазовой границы Г в сторону эмульсии, $D_n = -\dfrac{ht}{\vec{n}\cdot\nabla h}$ — скорость движения границы Г, $v_n = \vec{v}\cdot\vec{n}$. На Г выполняются соотношения [3]:

$\rho = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2$ (сохранение массы, массу ПАВ не учитываем)

$[P\cdot\vec{n}] = 2\sigma H\vec{n}$, $\sigma = e - TS = F_0 = \text{const}$ (сохранение импульса), $P_{II} = -(p_{\text{н}} s_{\text{н}} + p_{\text{в}} s_{\text{в}})I$

$\dfrac{dS}{dt} = S\vec{n}\cdot D\vec{n}$ (сохранение энергии), где H — средняя кривизна поверхности Г; S — энтропия.

Выполняется условие непрерывности скорости $\vec{v} = \vec{v}_{\text{н}} = \vec{v}_{\text{в}}$ и химического потенциала $\left[\dfrac{\Phi}{n}\right] = 0$, где n — число капель в единице объема; $\Phi = e - TS + \dfrac{p}{S}$ — полная энергия; $F = e - TS$ — свободная энергия. Таким образом задача для численной реализации поставлена.

3. Точные решения вязкой жидкости

Движение эмульсии возле капилляра квазистационарно, медленно меняется со временем. Можно сказать, что линии тока не меняются со временем. Рассмотрим стационарное осесимметрическое течение вязкой жидкости в сферической системе координат с центром в точке x_0 [4]:

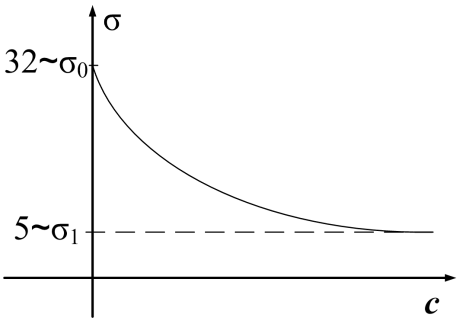

Рис. 7. Уменьшение поверхностного натяжения с увеличением концентрации эмульгатора (σ_1 соответствует концентрации эмульгатора в углеводородной фазе)

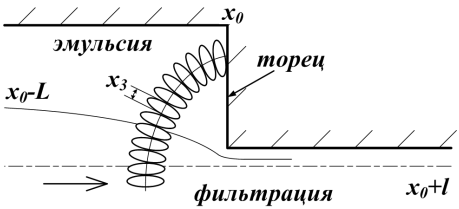

Рис. 8. Схематическое изображение «арки», образующейся на эквипотенциальной поверхности фазового перехода

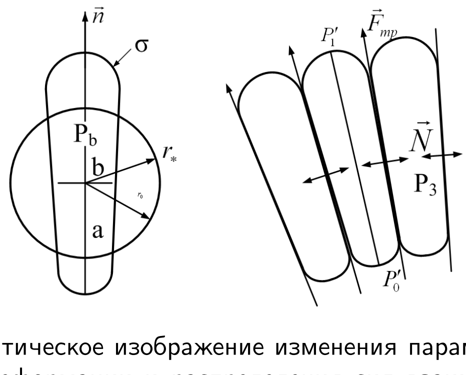

Рис. 9. Схематическое изображение изменения параметров капли при деформации и распределения сил взаимодействия и давлений

$$
\begin{gathered}
uu + \frac{v}{r}u_\theta - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}p_r = \\
= \nu\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}(ru_r + u)\right), \\
uv_r + \frac{v}{r}v_\theta + \frac{1}{r}uv + \frac{1}{\rho v}p_\theta = \\
= \nu\left(v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}u_\theta - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right), \\
ru_r + v_\theta + 2u + v\operatorname{ctg}\theta = 0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где u — радиальная скорость; v — меридианная скорость; θ — угол от оси симметрии.

Решение затухающее при $r \to \infty$ имеет вид [5–7]:

$$
u = \frac{F(\theta)}{r},\ v = \frac{f(\theta)}{r},\ \frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{r^2}\left(\nu F - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}K^2\right), \tag{2}
$$

$$
\begin{gathered}
F = -f'' - f\operatorname{ctg}\theta, \\
\nu(F'' + F'\operatorname{ctg}\theta + 2F) + F^2 - fF' = K^2,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где K — постоянная.

Известно точное решение системы (3), описывающее истечение тонкой струи вязкой затопленной в той же жидкости [5]:

$$
f = \frac{2\nu\sin\theta}{A - \cos\theta},\ F = \frac{2\nu(2A\cos\theta - \cos^2\theta - 1)}{(1-\cos\theta)^2},\ K = 0,
$$

где A — произвольная постоянная.

Для ползущих течений ($\nu \to \infty$) получим уравнение Лежандра $F'' + F'\operatorname{ctg}\theta + 2F = 0$ с общим решением

$$
\begin{gathered}
F = C_1\cos\theta + C_2\left(\frac{1}{2}\cos\theta\ln\left|\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right| - 1\right), \\
f = \frac{C_3}{\sin\theta} + \frac{C_1\cos^2\theta}{2\sin\theta} - \frac{1}{2}C_2\left(\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\ln\left|\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right|\right).
\end{gathered}
\tag{4}
$$

При $\nu = 0$ получим течение идеальной жидкости

$$F = K\sin(C_1 - C_2\cos\theta),\ \ f = -\frac{K}{C_2}\frac{\cos(C_1 - C_2\cos\theta)}{\sin\theta}, \qquad (5)$$

где C_i — постоянные.

Краевые условия для системы (1) имеют вид

$\upsilon = 0$ при $\theta = 0$; $u = 0$ при $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \nu \neq 0$;

$\upsilon = 0$ при $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{d}{2} < r < \dfrac{D}{2}$;

$-\dfrac{\pi d^2}{2}\rho \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u\Big|_{r=\frac{d}{2}} \sin\theta d\theta = Q$ — расход жидкости через полусферический вход в капилляр.

$u = \upsilon = 0$ при $2r\sin\theta = D$.

Последнее краевое условие учитывается в первом приближении при разложении решения системы (1) по степеням малого параметра $\dfrac{d}{r}$. Нулевое приближение есть точное решение (2), (3). Для него к системе (3) запишем краевые условия.

$$f(0) = 0;\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ -\pi\rho d\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta)\sin\theta d\theta = Q. \qquad (6)$$

Из (3) следует $F(0) + f'(0) = 0$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Итак, для системы (3) третьего порядка с параметром K имеем 4 краевых условия (6) (ν — несущественный параметр). Если существует решение краевой задачи, то постоянная K выражается через Q. Например, при $\nu = 0$ краевое условие для идеальной жидкости имеет вид

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ C_2 = \pi,\ l = 0.1,$$

и из (5) следует

$$F = K(-1)^l\cos(\pi\cos\theta),\ f = -\frac{K}{\pi}\frac{(-1)^l\sin(\pi\cos\theta)}{\sin\theta},$$

где $l = 0$ при $\dfrac{1}{2} < \cos\theta \le 1$; $l = 1$ при $0 < \cos\theta \le \dfrac{1}{2}$ (из условия $F \le 0$).

Из (6) определим расход через K:

$$Q = -\rho d K \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^l \cos(\pi\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= -2\rho d K \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z ds = 2\rho d K$$

Таким образом, задача (3), (6) корректно поставлена, и по ее численному решению можно нарисовать линии тока.

Список литературы

[1] Хабиров С. В. Теория поля. Уравнение механики сплошной среды. УГАТУ. Уфа. 1994. 42 с.

[2] Баренблат Г. Н., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Наука. 1972. 286 с.

[3] Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит. 2008. 376 с.

[4] Хабиров С. В. Симметричный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры. Препринт. Уфа. Гилем. 2004. 36 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ. 1953. 788 с.

[6] Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе ПММ. 1952. Т. 16. С. 255–256.

[7] Ярцев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ. 1950. Т. 20, вып. 11. С. 1031–1034.