УДК 532.5.032;532.527.2

Математическое моделирование течения Куэтта в аномально термовязкой жидкости[1]

Хизбуллина С. Ф.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Рассматривается установившееся течение аномально термовязкой жидкости между коаксиальными цилиндрами, из которых внешний цилиндр неподвижен, а внутренний вращается с постоянной угловой скоростью. На основе численного эксперимента обнаружены различные режимы течения в зависимости от параметра температурной зависимости вязкости.

1. Введение

Исследования течения вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами, берущих свое начало от классической работы Тейлора [1], актуальны до сих пор и востребованы в технических приложениях. Естественно, различные аспекты цилиндрического течения Куэтта изучались как экспериментально, так и теоретически. Историю решения этой задачи и обзор полученных результатов можно найти в [2], [3].

Однако в последние годы на себя обращают внимание жидкости, проявляющие немонотонные зависимости вязкости от температуры. Здесь и далее аномально термовязкой жидкостью называется жидкость, у которой вязкость немонотонно зависит от температуры. Учет эффектов течения жидкостей, обусловлен-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фонда фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (ОЭ–14) и Программы поддержки молодых ученых Президиума РАН

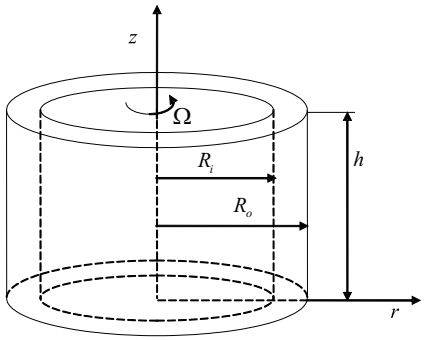

Рис. 1. Геометрическая область

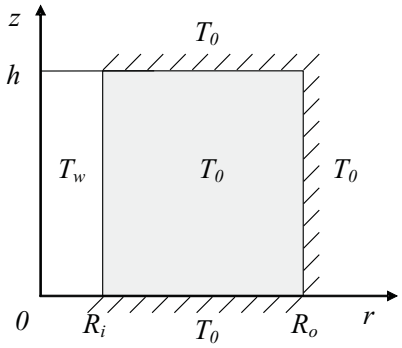

Рис. 2. Расчетная область

ных зависимостью вязкости от температуры, представляет сложную задачу, сопряженную с необходимостью применения современных вычислительных средств и методов математического моделирования.

2. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное движение аномально термовязкой жидкости в кольцевом зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, имеющими ограниченную высоту равную h (рис. 1). Полагается, что внешний цилиндр с радиусом R_o неподвижен, а внутренний с радиусом R_i — начинает вращаться с постоянной угловой скоростью Ω. Сделаны следующие допущения: течение является осесимметричным, жидкость несжимаема, массовые силы отсутствуют, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости жидкости постоянны. Система цилиндрических координат r, φ, z связана с осью вращения внутреннего цилиндра (ось z направлена вдоль оси цилиндров). Вследствие симметрии рассматриваемая расчетная область представляет собой прямоугольник шириной $d = R_o - R_i$ и длиной h (рис. 2).

Течение в зазоре между цилиндрами описывается следующи-

ми уравнениями движения в цилиндрических координатах:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v^2}{r} - \nu\left(T\right)\frac{u}{r^2} + \nu'\left(T\right)\left[\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r}\right], \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\nu\left(T\right)\frac{v}{r^2} - \frac{uv}{r} - \nu'\left(T\right)\frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu'\left(T\right)\left[\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\nu\left(T\right)I_2}{c_p}. \quad (4)$$

Выражение I_2 и оператор D/Dt определяются формулами:

$$I_2 = 4\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 4\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2,$$

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ruf - r\Phi\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(wf - \Phi\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

В последнем выражении переменная $\Phi \equiv \nu\left(T\right)$ — кинематическая вязкость жидкости для уравнений (1)–(3) и $\Phi \equiv \alpha$ — коэффициент температуропроводности жидкости для уравнения (4). Здесь u, v, w — компоненты скорости $\vec{u}$ вдоль осей r, φ, z соответственно; p, ρ, T, c_p — давление, плотность, температура и теплоемкость жидкости; $\nu'\left(T\right)$ — производная вязкости по температуре.

В начальный момент времени жидкость, заполняющая пространство между цилиндрами, покоится и имеет постоянную температуру

$$t = 0: \quad \vec{u} = 0, \quad T = T_0. \quad (5)$$

Граничным условиям на верхнем и нижнем торцах цилиндров, а также на внешнем цилиндре соответствуют условия прилипания для скорости $\vec{u}$ и постоянства температуры

$$z = 0,\, z = h,\, r = R_o: \quad \vec{u} = 0, \quad T = T_0, \quad (6)$$

а на внутреннем цилиндре полагается

$$r = R_i : \quad v = \Omega R_i, \quad u = w = 0, \quad T = T_w. \tag{7}$$

Численные исследования проводились для модельной жидкости, кинематическая вязкость которой задавалась в виде функции

$$\nu\left(T\right) = \nu_{min}\left(1 + Ae^{-B(T-T_*)^2}\right), \quad A = \frac{\nu_{max}}{\nu_{min}} - 1\,, \tag{8}$$

где A — параметр аномалии, характеризующий отношение минимального и максимального значений вязкости; $B > 0$ — параметр аномалии, характеризующий степень заполненности данного температурного диапазона аномалией вязкости (его увеличение свидетельствует о сужении диапазона температур, на котором происходит немонотонное изменение вязкости); T_* — температура, при которой жидкость имеет максимальную вязкость.

3. О методе решения задачи

Численное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений (1)–(4) с краевыми условиями (5)–(7) выполняется с помощью метода контрольного объема с использованием алгоритма Simple [4], модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости. Для решения полученных систем алгебраических уравнений использовался метод переменных направлений. Численный метод решения тестировался на модельных задачах: течение Пуазейля в круглой трубе и цилиндрическое течение Куэтта [5].

4. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились для следующих параметров:

$$R_i = 0.005 \text{ м},\ R_o = 0.01 \text{ м},\ h = 0.02 \text{ м},$$

$$\rho = 900 \text{ кг/м}^3,\ \alpha = 1.13 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с},\ \nu_{min} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$T_0 = 20^\circ\mathrm{C},\ T_w = 90^\circ\mathrm{C},\ T_* = 55^\circ\mathrm{C}.$$

Проведенные численные эксперименты показали, что режим течения зависит как от угловой скорости Ω, так и от параметров аномалии A и B. Для немонотонной температурной зависимости вязкости (8) варьирование параметров аномалии приводит к возникновению различных режимов течения. В то время как для жидкости с постоянной вязкостью $\nu_2(T) = K\nu_{min}$ и жидкости с монотонно-убывающей зависимостью вязкости от температуры $\nu_3(T) = \nu_{min}e^{-C(T-T_{max})}$ течение при той же угловой скорости является стационарным (рис. 3(1)–рис. 6(1)). Параметры этих зависимостей K и C выбирались из условия равенства следующих интегралов

$$\int\limits_{T_{min}}^{T_{max}} \nu_1(T)dT = \int\limits_{T_{min}}^{T_{max}} \nu_2(T)dT = \int\limits_{T_{min}}^{T_{max}} \nu_3(T)dT\,.$$

Здесь $\nu_1(T)$ — это модельная немонотонная температурная зависимость вязкости (8).

Для параметра аномалии $B = 0.0075$ и угловой скорости $\Omega < 16$ с$^{-1}$ наблюдаются лишь стационарные режимы течения, характеризуемые устойчивыми линиями тока. В этом случае линии тока симметричны относительно середины длины цилиндров. А изменение параметров аномалии приводит лишь к их деформированию.

Увеличение угловой скорости приводит не только к деформированию линий тока с изменением параметров аномалии вязкости, но и к возникновению осцилляций линий тока относительно некоторого устойчивого состояния, то есть возникает колебательный режим течения. Например, для угловой скорости $\Omega = 20$ с$^{-1}$ в диапазоне значений параметра аномалии $A \in [0\,;20]$ было обнаружено, что наряду со стационарным режимом течения, при значениях $0.53 < A < 1.85$ возникает и колебательный режим. Причем помимо периодических колебаний были обнаружены как квазипериодические, так и хаотические колебания.

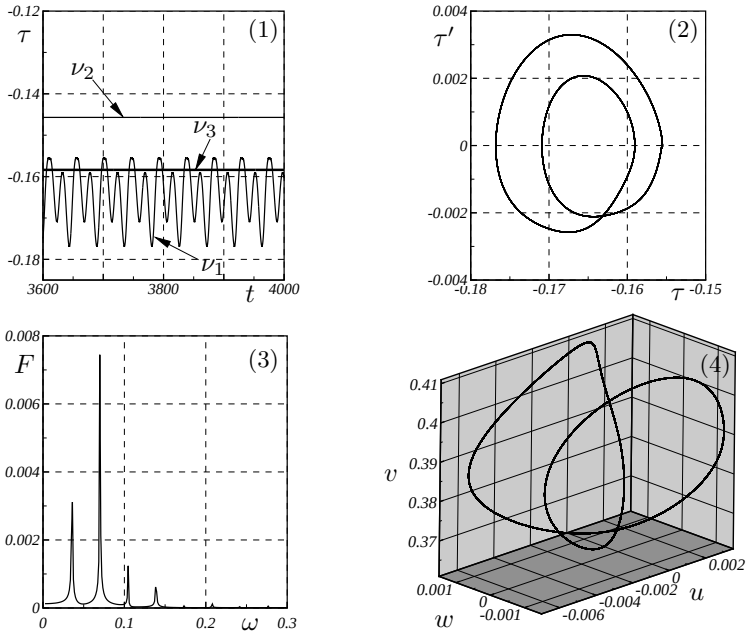

Рис. 3. Касательное напряжение в зависимости от времени (1), фазовый портрет (2), спектр мощности касательного напряжения (3) и пространство (u, v, w) (4). $\Omega = 20$ с$^{-1}$, $A = 1.6$

Для более детального изучения характера колебательного режима вводится касательное напряжение, вычисляемое в центре расчетной области

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right),$$

и спектр мощности касательного напряжения

$$|F(\omega)| = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\bar{t})\, e^{i\bar{\omega}\bar{t}} d\bar{t}\,,$$

где $\bar{t}$, $\bar{\omega}$ — безразмерные время и круговая частота.

Типичный квазипериодический режим, который характеризуется возникновением скрещивающихся фазовых траекторий и

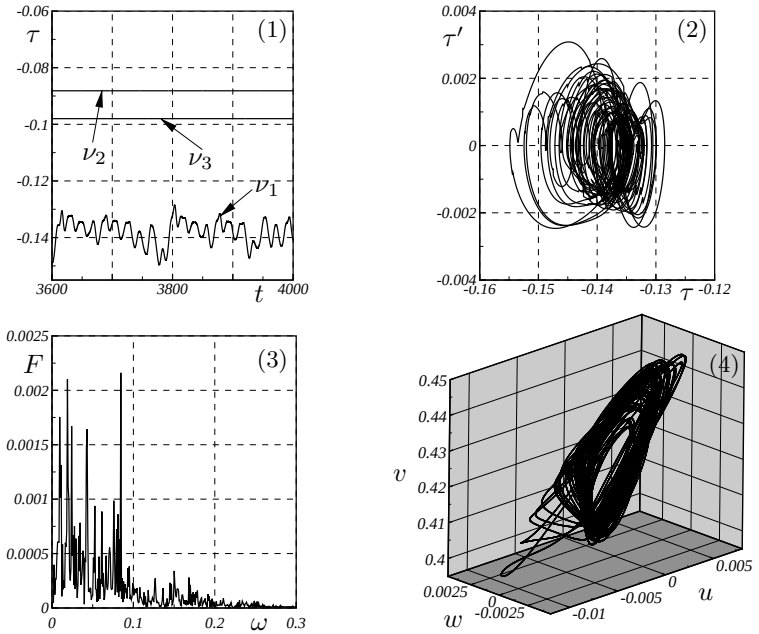

Рис. 4. Касательное напряжение в зависимости от времени (1), фазовый портрет (2), спектр мощности касательного напряжения (3) и пространство (u, v, w) (4). $\Omega = 20$ с$^{-1}$, $A = 0.8$

наличием конечного числа пиков на спектре частот, показан на рис. 3. Здесь представлены графики касательного напряжения в зависимости от времени (1), фазовый портрет в проекции $(\tau\,, \tau')$ (2), спектр мощности касательного напряжения (3) и трехмерное фазовое пространство (u, v, w) (4) для параметра аномалии $A = 1.6$ и угловой скорости $\Omega = 20$ с$^{-1}$.

Помимо квазипериодических колебаний в диапазоне значений параметра аномалии $0.72 < A < 0.93$ были обнаружены и хаотические колебания, характеризующиеся не повторяющимися колебаниями, странным аттрактором и сплошным спектром частот (рис. 4).

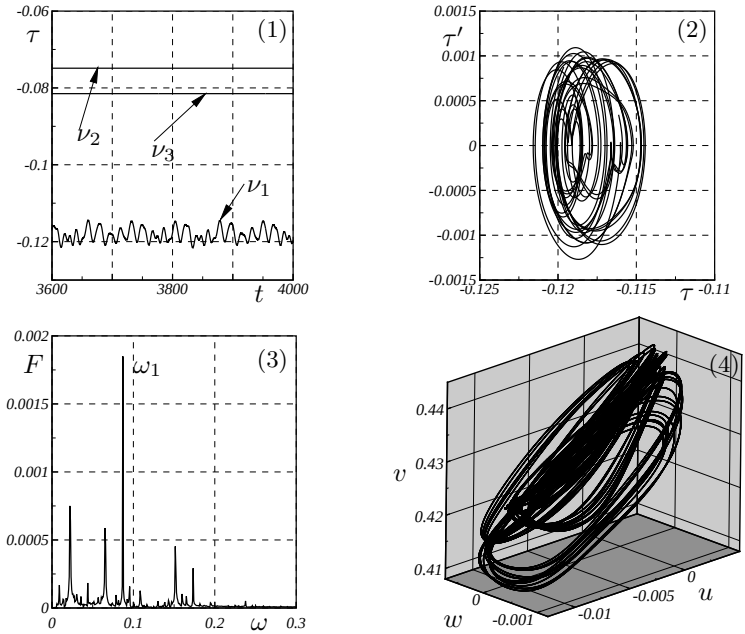

Рис. 5. Касательное напряжение в зависимости от времени (1), фазовый портрет (2), спектр мощности касательного напряжения (3) и пространство (u, v, w) (4). $\Omega = 20$ с$^{-1}$, $A = 0.58$

В диапазоне значений параметра аномалии $0.58 \leq A \leq 0.72$ был обнаружен переходный к хаотическому режим, который характеризуется блуждающимися фазовыми траекториями и ярко выраженной основной частотой ω_1. Типичные динамические характеристики течения представлены на рис. 5. В данном случае параметр аномалии $A = 0.58$.

Периодический режим обнаружен при значении параметра аномалии $A = 1.81$ (рис. 6). Видно, что нет скрещивающихся траекторий и в спектре мощности имеется единственный пик.

Начиная со значения $A = 0.93$, характер течения вновь становится квазипериодическим. А при значениях параметра анома-

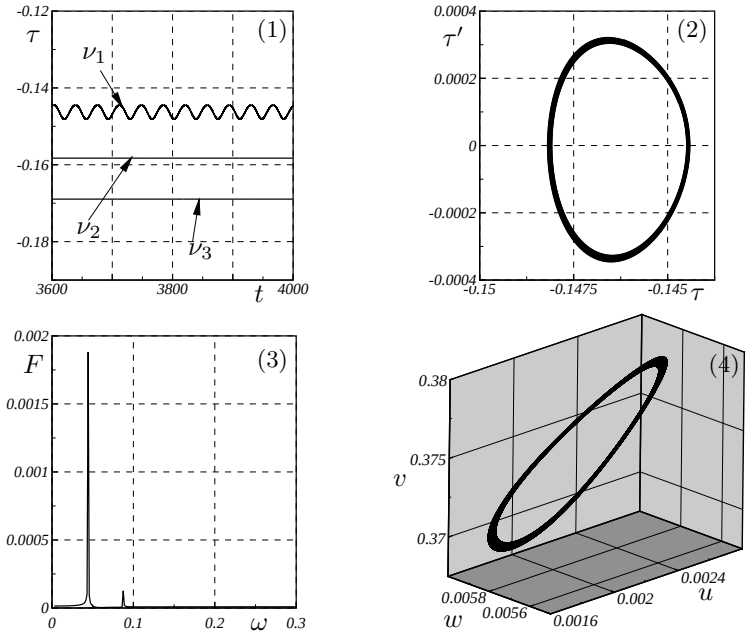

Рис. 6. Касательное напряжение в зависимости от времени (1), фазовый портрет (2), спектр мощности касательного напряжения (3) и пространство (u, v, w) (4). $\Omega = 20$ с$^{-1}$, $A = 1.81$

лии $1.85 \leq A \leq 20$ режим течения уже является стационарным. Причем было обнаружено, что и для значения $A = 1.82$ течение также является стационарным.

Таким образом, установлено, что характер течения с увеличением параметра аномалии A претерпевает несколько четко выраженных переходов, начиная от периодического течения и заканчивая хаотическим режимом, и обратно от хаотического течения к периодическому.

При угловой скорости $\Omega = 20$ с$^{-1}$ для других значений параметра аномалии B с увеличением параметра A переход от стационарного к колебательному режиму и обратно происходит ана-

логично рассмотренному выше случаю.

При использовании на верхнем и нижнем торцах цилиндров в качестве граничных условий для температуры — линейное распределение температуры от T_w до T_0, динамическая картина течения меняется. Колебательный режим происходит при значениях параметра аномалии $0.3 < A < 1.1$. Причем хаотического режима не наблюдалось.

5. Заключение

В данной работе методами вычислительного эксперимента показано, что немонотонная зависимость вязкости от температуры приводит к существенному изменению динамических характеристик течения и к возникновению различных режимов течения в кольцевом зазоре между коаксиальными цилиндрами, имеющими ограниченную длину.

Наряду со стационарным режимом, обнаружен и колебательный режим течения, в том числе и хаотический.

Автор благодарит д.ф.-м.н. С. Ф. Урманчеева за проявленный интерес к работе и за ее обсуждение и к.ф.-м.н. Д. М. Зарипова за полезные замечания.

Список литературы

[1] Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 223. 1923. P. 289–343.

[2] Cole J. A. Taylor-vortex instability and annulus-length effects // J. Fluid Mech. 1976. V. 75. P. 1–15.

[3] DiPrima R. C., Eagles P. M., Ng B. S. The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow // Phys. Fluids. 1984. V. 27, № 10. P. 2403–2411.

[4] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 736 с.