



УДК 532.5

ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Иткулова Ю. А.

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем»,

БашГУ, Уфа

Аннотация. В работе исследуется трехмерное течение вязкой жидкости, описываемое уравнениями Стокса, в цилиндрической трубе и канале переменного сечения. Построена качественная триангуляция поверхности канала переменного сечения. Задача решалась численно методом граничных элементов в двух модификациях. Проведено сравнение вариантов этого метода для канала разного радиуса сужения, а также для течения Пуазейля — сравнение с аналитическим решением. Найден критический радиус сужения канала, при котором формируются вихри.

1. Введение

Повышение дебита нефтяных скважин всегда было и остается важной проблемой нефтедобывающей отрасли. На величину дебита скважины конкретного месторождения, прежде всего, влияет состояние призабойной зоны скважины с точки зрения ее фильтрационных свойств. Ухудшение проницаемости даже в небольшой окрестности скважины существенно снижает ее продуктивность. Для анализа фильтрационных свойств важно определить критический радиус сужения канала, при котором формируются вихри. Исследования также связаны с проблемой запираания эмульсий в микроканалах.

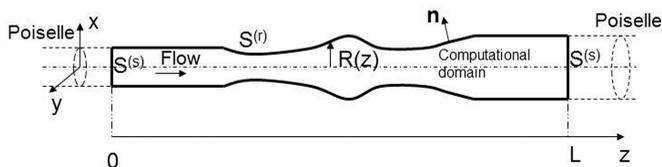


Рис. 1. Канал переменного сечения

2. Постановка задачи

Для построения разумных математических моделей течения систем с частицами необходимо прибегнуть к ряду упрощающих предположений. Будем считать, что поток является ламинарным, кроме того, достаточно «медленным», чтобы при решении уравнений, описывающих движение жидкости относительно частиц, можно было не учитывать инерционные эффекты. Это упрощение вполне оправдано, поскольку во многих дисперсных системах скорости жидкости и в самом деле достаточно малы. Часто рассматриваемые системы состоят из очень мелких частиц, и даже в том случае, когда скорость частиц относительно стенок сосуда велика, они движутся медленно по отношению к обтекающей их жидкости или по отношению друг к другу. Мы будем рассматривать системы, которые проявляют «сильно вязкое» поведение. Такие системы описываются так называемыми уравнениями ползущего течения, или уравнениями Стокса.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью μ в ограниченном канале переменного сечения с гладкой поверхностью S при малых числах Рейнольдса (рис. 1). Движение жидкости описывается уравнениями Стокса:

$$\frac{1}{\mu} \nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Поверхность канала разбивается на два подмножества: $S = S^{(s)} \cup S^{(r)}$, где $S^{(r)}$ — жесткая граница (боковая поверхность канала) и $S^{(s)}$ — мягкая граница (торцы канала). Граничные условия задавались следующие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}. \quad (2)$$

Задача решалась численно методом граничных элементов в нескольких модификациях.

3. Построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения

Предполагаем, что канал является осесимметричным радиуса $R(x)$ и длиной $x \in [0, L]$, где x — координата вдоль оси канала. Канал переменного сечения можно получить из кругового цилиндра аппроксимацией его вершин на аналитическую поверхность $R(x)$. Массивы граней таких моделей будут совпадать, т.е. фигуры будут с одинаковой топологией. Таким образом, построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения сводится к задаче формирования подобной сетки для кругового цилиндра.

Триангуляция боковой поверхности кругового цилиндра была получена из триангуляции 4-х связанных граней параллелепипеда, полученного из куба. На торцах цилиндра производилась триангуляция Делоне, затем сетки склеивались. О качественной ориентации сетки говорит то, что нормали цилиндра сонаправлены и направлены вне канала.

К сожалению, построенная триангуляция канала переменного сечения не удовлетворяла критериям качества сетки, так как равномерное разбиение вдоль образующей канала в сужающейся части давало «вытянутые» треугольники. Поэтому на горлышке канала необходимо было сгустить сетку. Для использования метода вершинных коллокаций в методе граничных элементов необходимо, чтобы поверхность была гладкой. Поэтому торцевые части пришлось вытянуть вдоль оси цилиндра. На рис. 2 представлена качественная триангуляция канала.

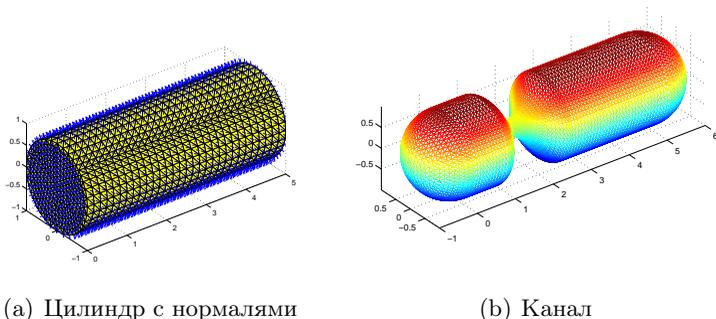


Рис. 2. Качественная триангуляция канала

4. Метод граничных элементов в нескольких модификациях

Метод граничных элементов состоит в преобразовании дифференциального уравнения в частных производных, описывающего поведение неизвестной функции внутри и на границе области, в интегральное уравнение, определяющее только граничные значения, и затем отыскании численного решения этого уравнения. Если требуется найти значения потенциала во внутренних точках области, то их можно вычислить, используя известные решения на границе. Поскольку все обусловленные численными расчетами приближения связаны только с границей, размерность задачи уменьшается на единицу и получаемая система уравнений оказывается меньшей по сравнению с исходной системы дифференциальных уравнений.

Уравнения Стокса (1) переписываются в граничных интегралах [1, 2]. Сначала находим вектор нормального напряжения \mathbf{f} на границе

$$\frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^0(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S, \quad (3)$$

где \mathbf{G} — фундаментальное решение уравнения Стокса; \mathbf{T} — тензор напряжений, определяются как

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Сингулярные интегралы рассчитывались, используя известные тождества для тестовых решений: постоянное и линейное течения. Затем, значения скорости \mathbf{u} в любой точке области \mathbf{y} можно вычислить через граничные интегралы:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V. \quad (5)$$

Для проверки достоверности полученных результатов, задача также была решена модифицированным методом граничных элементов, который заключается в следующем.

Нам известно точное решение для течения Пуазейля, которому задаем возмущение

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'. \quad (6)$$

Граничные условия (2) для возмущений \mathbf{u}' и \mathbf{f}' будут выглядеть следующим образом

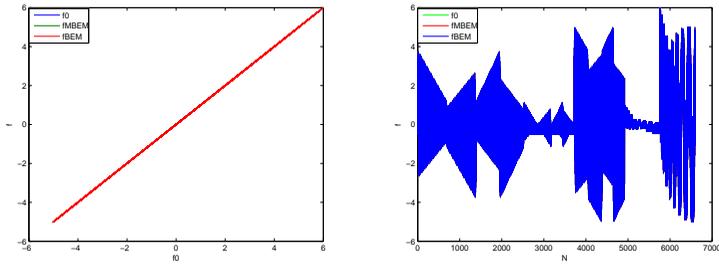
$$\mathbf{u}' = 0, \quad \mathbf{x} \in S^{(s)}, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}^0, \quad \mathbf{x} \in S^{(r)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}.$$

Из интегральных уравнений (3)–(5), которым также удовлетворяют возмущения \mathbf{u}' и \mathbf{f}' , находим их значения. С учетом (6) определяем вектор нормального напряжения \mathbf{f} на границе и компоненты скорости \mathbf{u} в любой точке области.

5. Результаты численного моделирования

Для тестирования программы использовался канал с входным и выходным сечением радиуса $R = 1$, длиной $L = 5$.



(а) Относительно аналитического решения

(б) Относительно узлов

Рис. 3. Нормальное напряжение на границе

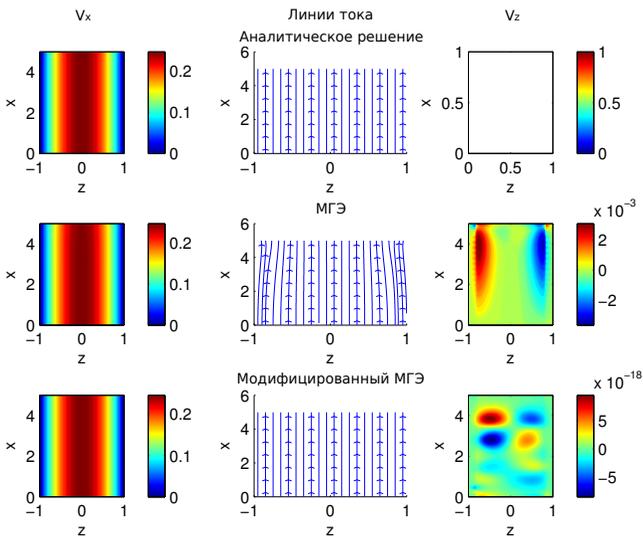


Рис. 4. Сравнение модификаций МГЭ с аналитическим решением

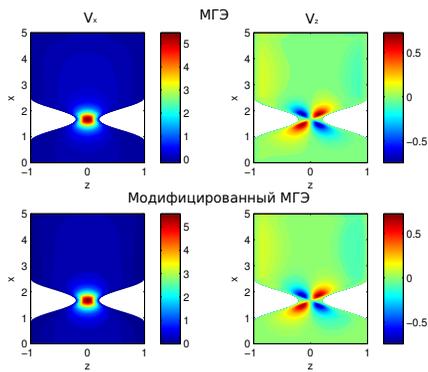
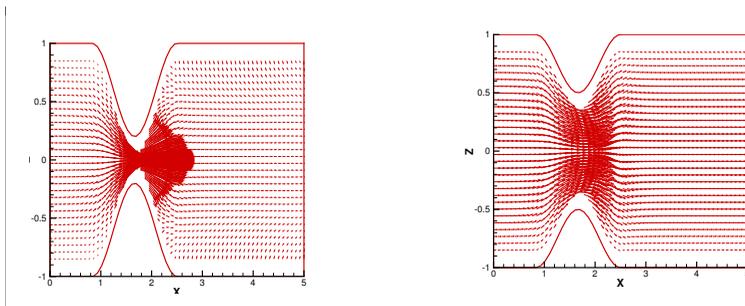


Рис. 5. Поля скорости для канала радиусом сужения $R_{min} = 0.2$



(a) $R_{min} = 0.2$

(b) $R_{min} = 0.5$

Рис. 6. Вектор скорости канала переменного сечения

Проведено сравнение компонент вектора нормального напряжения \mathbf{f} на границе методом граничных элементов в нескольких модификациях с аналитическим решением для течения Пуазейля. На рис. 3 представлены результаты сравнения относительно точного решения и узлов сетки. Погрешность вычисления неизвестных значений на границе составила порядка 1%.

На рис. 4 представлены поля скорости и линии тока, вычисленные в осевом сечении цилиндра плоскостью Oxz , для течения Пуазейля. Из рисунка видно, что численные расчеты хорошо приближаются к аналитическому решению. Однако, модифицированный метод граничных элементов, особенно для компонент скорости вдоль оси Oz , дает более точные результаты, по сравнению с обычным методом граничных элементов.

Получены численные результаты для канала различного радиуса сужения методом граничных элементов в двух модификациях и проведено сравнение этих вариантов метода. В результате относительная погрешность составила порядка 0,1–1,7% в зависимости от формы канала. По мере уменьшения радиуса сужения канала погрешность увеличивается и максимальное значение 1.7 % принимает на цилиндрическом канале. На рис. 5 представлены поля скорости для канала радиусом сужения $R_{min} = 0.2$, где образуется вихрь. К сожалению, наблюдать вихрь в полном размере не представляется возможным, т.к. на границе сингулярные интегралы вычисляются не точно, а с помощью известных тождеств для линейных и постоянных течений, что ведет к большой погрешности вычисления поля скорости в точках, лежащих близко к границе. Из рис. 6 видно, что в канале радиусом сужения $R_{min} = 0.5$ вихря не наблюдается.

Список литературы

- [1] Pozrikidis C. Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).
- [2] Бреббия К. Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.