

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАПЛИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Иткулова Ю. А.^{,**}, Солнышкина О. А.^{*,**}*

**Институт механики УНЦ РАН, Уфа*

***Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем»,
БашГУ, Уфа*

Аннотация. В работе исследуется трехмерное течение Стокса двух несмешивающихся жидкостей. Моделируется динамика одиночной сферической капли в неограниченном потоке другой жидкости. Задача решалась численно методом граничных элементов. Проведено сравнение полученных численных результатов с аналитическим решением. Исследования связаны с проблемой запираания эмульсиями микроканалов.

1. Введение

Рассматриваемая задача является одним из этапов исследования проблемы, связанной с использованием эмульсий в нефтяной отрасли. Существуют два типа эмульсий: эмульсии, закачиваемые в пористый пласт для увеличения нефтеотдачи, и эмульсии, образующиеся при нагнетании в пласт воды для вытеснения нефти, которая перемешивается с нефтью. Поэтому важно разработать эффективный численный аппарат, позволяющий детально исследовать поведение эмульсий, включая взаимодействие капель, их коалесценцию, и наблюдать многие эффекты на микроуровне в подобных системах «жидкость–жидкость».

2. Математическая модель

Опишем поведение оболочки капли с плотностью ρ_2 и вязкостью μ_2 в потоке жидкости с плотностью ρ_1 и вязкостью μ_1 . Пусть они занимают объём V_2 и V_1 соответственно, S — граница раздела фаз. Гравитационная постоянная g и коэффициент поверхностного натяжения капли γ постоянны. На бесконечности скорость потока обтекающей каплю жидкости 1 равна $\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x})$. При числах Рейнольдса Re_1, Re_2 значительно меньше 1, поведение потока жидкости 1, обтекающего каплю, и поведение жидкости 2 внутри капли описывается уравнениями Стокса:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu_i \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; p — давление, которое включает гидродинамические компоненты.

Условия на границе двух жидкостей:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2, & \mathbf{f} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = f\mathbf{n}, \\ f &= \gamma(\nabla \mathbf{n}) + (\rho_1 - \rho_2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in S. \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{f} — поверхностное напряжение; \mathbf{n} — нормаль к поверхности, направленная в жидкость 1.

Условие на бесконечности

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Кинематическое условие, описывающее динамику капли

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

3. Численное моделирование

Задача решалась методом граничных элементов [1]. Суть метода состоит в преобразовании дифференциального уравнения в частных производных, описывающего поведение неизвестной функции внутри и на границе области, в интегральное уравнение, определяющее только граничные значения, и поиске численного решения этого уравнения. Если требуется найти значения

потенциала во внутренних точках области, то их можно вычислить, используя известные решения на границе. Таким образом, размерность задачи уменьшается на единицу.

Для данной поверхности S скорость \mathbf{u} в произвольной точке \mathbf{y} может быть вычислена через граничные интегралы [3, 4]:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y} \in V_1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in V_2, \quad \lambda\mathbf{u}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \end{array} \right\} = \quad (5)$$

$$= \int_S \left\{ -\frac{1}{\mu} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (1-\lambda) [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\} dS(\mathbf{x}),$$

где $\mu = \mu_1$ — вязкость обтекающей жидкости; $\lambda = \mu_2/\mu_1$ — отношение вязкостей внутренней и внешней жидкостей; \mathbf{G} — фундаментальное решение уравнения Стокса; \mathbf{T} — тензор напряжений, определяются как

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}, \quad (6)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Поверхность S разбивается на N узлов \mathbf{x}_i , по которым мы строим квадратурные формулы граничных интегралов.

Используя метод вершинных коллокаций, последнее уравнение в граничных интегралах (5) в точках $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j$ можно записать:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{1+\lambda}{2} \mathbf{I}_{ji} + (1-\lambda) \mathbf{I}_{ji}^{(T)} \right] \cdot \mathbf{u}_i = \quad (7)$$

$$= \mathbf{u}_{\infty, j} - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{ji}^{(G)} f_i, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{I}_i^{(G)}(\mathbf{y}) = \int_{S_i} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{I}_i^{(T)}(\mathbf{y}) = \int_{S_i} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (8)$$

где \mathbf{I}_{j_i} — единичная матрица, остальные пространственные функции записаны в рассматриваемой точке коллокации.

Вычисление сингулярных элементов производилось на основе известных интегральных тождеств [5].

Решая систему линейных алгебраических уравнений (7), получаем компоненты скорости на границе.

4. Геометрия расчетной области

В первую очередь, для решения поставленной задачи необходимо определить геометрию поверхности капли. Поверхность капли аппроксимируется пространственными треугольниками, вершины которых будут узлами дискретизации.

Предполагаем, что капля является эллипсоидальной. Триангуляцию связной 3D фигуры можно получить из триангуляции куба, которая легко формируется, так как топология фигур одинакова. Но, к сожалению, подобное отображение не всегда строит качественную сетку. Валентность вершин, полученных отображением углов куба на поверхность эллипсоида, будет равна 4, что может дать большую ошибку при вычислении геометрических характеристик. Второй способ аппроксимирования поверхности эллипсоида — вытягивание сферы. Если поверхность сферы описана треугольниками Делоне, то получим качественную сетку с валентностью узлов не меньше 5.

На рис. 1 представлены триангуляции поверхности капли, полученные двумя способами. Как видно, второй из них аппроксимирует поверхность более точно, и треугольники близки к равносторонним, что определяет качественную сетку. По этой причине будем пользоваться при решении нашей задачи второй сеткой.

Для решения системы уравнений (7) необходимо вычислить граничные интегралы. Предварительно следует определить геометрические характеристики капли, такие как нормаль в узлах области $n(x)$, площадь поверхности S_i , относящуюся к i -ому узлу, которую можно вычислить следующими способами: разбиение медианами, биссектрисами, серединными перпендикулярами или комбинированным методом.

Площади были найдены двумя способами: разбиение медианами и используя комбинированный метод многоугольников Вороного и биссектрис. Оба метода дали достаточно хорошее разбиение области и показали свою эффективность на практике.

Нормали к граням находятся как векторное произведение двух векторов, направленных вдоль сторон треугольника. Важно, чтобы нормали были соориентированы. Для этого необходимо брать правильную тройку. Нормаль в узлах расчетной области находилась осреднением нормалей к граням, содержащих данный узел, с соответствующим вкладом в контрольную площадь.

В условии на границе двух жидкостей (2) присутствует $\nabla \mathbf{n}$ — половина средней кривизны поверхности, которую необходимо определить во всех точках коллокации.

Средняя кривизна поверхности была найдена методом контурных интегралов и методом установления параболоида.

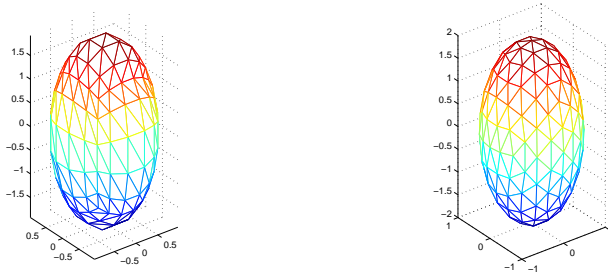
На рис. 2(а) представлена погрешность численных методов вычисления кривизны в точках коллокации, полученная на сетке Делоне, т.е. с валентностью узлов больше 4. Из графиков видно, что метод установления параболоида дает более точное значение средней кривизны с погрешностью не более 3%.

Но если триангулировать эллипсоид сеткой, полученной из триангуляции куба, где два узла имеют валентность 4, метод установления параболоида даст в этих узлах погрешность порядка 13% (рис. 2(б)).

Таким образом, сетка с валентностью узлов больше 4, смешанные многоугольники Вороного, метод контурных интегралов создают точный аппарат для нахождения геометрических характеристик оболочки капли.

5. Результаты

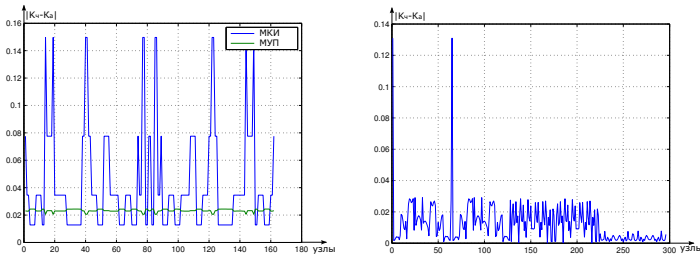
На рис. 3 показана капля в начальный момент времени $t = 0$ и деформированная капля при $t = 10^{-5}$ с одинаковыми плотностями жидкостей $\rho_1 = \rho_2 = 10^3$, с вязкостью обтекающей жидкости



(a) Триангуляция, полученная из куба

(b) Триангуляция Делоне

Рис. 1. Триангуляция поверхности капли



(a) Погрешность метода кон-турных интегралов и метода новления параболоида на нека-установления параболоида на чественной сетке

сетке Делоне

(b) Погрешность метода уста-

новления параболоида на нека-

установления параболоида на чественной сетке

сетке Делоне

Рис. 2. Погрешность методов вычисления средней кривизны поверхности

$\mu_1 = 10^{-3}$ и капли $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$, коэффициентом поверхностного натяжения $\gamma = 0,005$. Все переменные заданы в системе Си.

Из рисунков видно, что эллипсоидальная капля под действием поверхностного натяжения приобретает сферическую форму.

Было проведено сравнение численного решения с аналитическим [2] в 3 этапа:

1. Компоненты скорости на границе капли, полученные аналитически, сравнивались с численными значениями, полученными методом граничных элементов. Погрешность составила 0,5%.
2. Компоненты скорости внутри и вне капли, полученные соответственно из первого и второго уравнений (5), используя для вычисления правой части точные значения $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ сравниваются с аналитическими решениями.
3. Компоненты скорости внутри и вне капли, полученные соответственно из первого и второго уравнений (5), используя для вычисления правой части численные значения $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ сравниваются с аналитическими решениями.

На рис. 4 показаны результаты, полученные на 2-ом (Analyt boundary) и 3-ем (BEM boundary) этапах сравнения с аналитическим решением (Analytical). Результаты сравнения показывают хорошее приближение численных расчетов к аналитическим с некоторой погрешностью, которая зависит от соотношения вязкостей рассматриваемых жидкостей λ и количества узлов дискретизации.

6. Заключение

Разработан программный продукт, моделирующий деформацию капли одной жидкости в потоке другой жидкости методом граничных элементов.

При численном решении использованы вспомогательные методы установления параболоида и метод контурных интегралов для вычисления средней кривизны области.



(а) Форма начальной капли (б) Форма деформированной капли

Рис. 3. Динамика капли

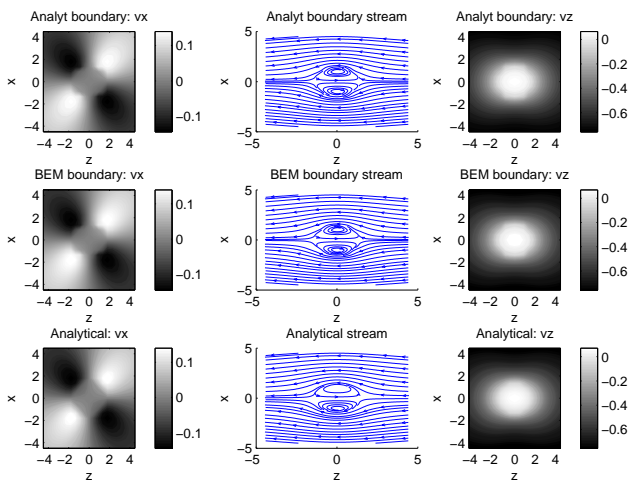


Рис. 4. Компоненты скоростей внутри и вне капли

Сравнение результатов решения ряда тестовых задач с аналитическими решениями показало высокую эффективность выбранных методов и разработанных алгоритмов.

Решенные задачи являются первым и главным шагом для дальнейшего моделирования поведения водонефтяных эмульсий в микроканалах.

Список литературы

- [1] Бреббия К. Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [2] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 623 с.
- [3] Zinchenko A.Z. and Davis R.H. An efficient algorithm for hydrodynamical interaction of many deformable drops // J. Comp. Phys. vol. 157, 2000. 539-587 p.
- [4] Rallison J.M. A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow // J. Fluid Mech. vol. 89. part 1, 1978. 191-200 p.
- [5] Pozrikidis C. Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).