УДК 532.13;532.5.032

Влияние различных видов силы трения на движение поршня в трубе[1]

Насибуллаев И. Ш.[*], *Насибуллаева Э. Ш.*[**]
[*]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа
[**]Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В работе рассматривается влияние вязкого и сухого трений на движение поршня внутри цилиндра под действием осциллирующего перепада давления. Численно решаются уравнения движения поршня и жидкости.

1. Введение

Исследование влияния трения между внутренними частями технических элементов на характер движения элементов является актуальной задачей, так как позволяет определить параметры, при которых трение будет минимальным, а коэффициент полезного действия — максимальным. С точки зрения трибологии различают различные виды трения, прежде всего, *сухое* и *вязкое* трения. В первом приближении коэффициент сухого трения λ является коэффициентом пропорциональности между силой трения F_f и силой нормальной реакции N_n (закон Амонтона–Кулона). Сила вязкого трения проявляется при движении твердого тела по поверхности жидкости и определяется напряжением, создаваемым жидкостью на поверхности твердого тела. Величина силы вязкого трения F_v ньютоновской жидкости пропорциональна площади контакта и градиенту скорости в направлении, перпендикулярном движению (закон Ньютона). Коэффи-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 11-01-97007, 11-08-00823)

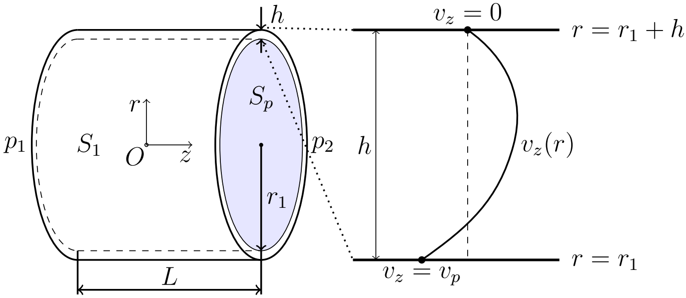

Рис. 1. Схема течения жидкости в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами

циентом пропорциональности является величина динамической вязкости жидкости μ [1]. Таким образом, для определения силы вязкого трения, действующей на твердую поверхность, необходимо решить гидродинамическую задачу движения жидкости.

2. Математическая модель

Рассмотрим движение поршня радиуса r_1 и массой m внутри цилиндра радиуса $r_2 = r_1 + h$ (h — зазор между поршнем и цилиндром), заполненного жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ, под действием периодического по времени перепада давления $\Delta p f(t)$, $f(t) = \cos(\omega t)$ (рис. 1), где $\Delta p = (p_1 - p_2)$; $\omega = 2\pi f$; f — частота осцилляций давления.

Начало цилиндрической системы координат поместим на оси в центре цилиндра. Координаты в радиальном, окружном и осевом направлениях обозначим через r, φ и z соответственно. Соответствующие компоненты скорости течения жидкости — v_r, v_φ и v_z. Скорость движения поршня имеет только одну компоненту v_p — вдоль оси z.

Уравнение движения поршня описывается вторым законом Ньютона:

$$m\frac{dv_p(t)}{dt} = S_p \Delta p f(t) - \mu S_1 \left.\frac{\partial v_z(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_1}, \qquad (1)$$

где S_p — площадь поперечного сечения поршня; $S_1 = 2\pi r_1 L$ — площадь внешней поверхности поршня; L — длина поршня. Второе слагаемое уравнения (1) описывает силу вязкого трения

$$F_v = \tau S_1 = \mu S_1 \left.\frac{\partial v_z(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_1},$$

где τ — напряжение поршня на поверхности.

В начальный момент времени поршень покоится: $v_p(0) = 0$.

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости [2]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

и уравнением Навье–Стокса [2]:

$$\left\{\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Пренебрегая краевыми эффектами, которые возникают вблизи краев поршня, получим $v_z = v_z(r,t)$. Поскольку течение является осесимметричным и не рассматривается осевое вращение поршня, компонента скорости $v_\varphi = 0$. Из уравнения неразрывности (2) получим, что $v_r = 0$. Таким образом, рассматриваемое течение жидкости соответствует нестационарному параллельному течению. Уравнение Навье–Стокса (3) запишется в виде:

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \tag{4}$$

где градиент давления $\partial p/\partial z = (\Delta p/L) f(t)$.

Граничные условия на поверхности поршня и цилиндра определяются из условия залипания:

$$v_z(t, r_1) = v_p(t), \quad v_z(t, r_2) = 0. \tag{5}$$

Для исследования системы проведем обезразмеривание уравнений. В качестве характерного размера выберем ширину зазора h, а для безразмерного времени выберем обратную частоту потока ω^{-1}. Размерные величины примут вид (безразмерные величины записаны с тильдами):

$$z = r_1 \tilde{z},\ r = r_1 \tilde{r},\ L = r_1 \tilde{L},\ v = (r_1 \omega) \tilde{v},\ t = \omega^{-1} \tilde{t}.$$

Опуская тильды, запишем безразмерную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = a_p f(t) + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \dfrac{\partial v_p}{\partial t} = b_p f(t) - b_f \left. \dfrac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=r_1}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho (r_1 \omega) r_1}{\mu}$ — число Рейнольдса; $a_p = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\Delta P}{L} \dfrac{1}{\mu \omega}$ — амплитуда давления для жидкости; $b_p = a_p \rho / \rho_p$ — амплитуда давления для поршня; ρ_p — плотность материала поршня; $b_f = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{2}{r_1} \dfrac{\rho}{\rho_p}$ — величина, характеризующая силу вязкого трения.

3. Численная реализация

Уравнения (1) и (6) с граничными условиями (5) записывались с помощью метода конечных разностей и решались численно методом Ньютона. Отметим, что после записи дифференциальных уравнений через конечные разности, мы получаем систему алгебраических уравнений, которую, дополняя первым граничным условием (5) в виде $v_z^{j=0,i} = v_p^i$ (здесь индексы j и i соответствуют узлу по координате и моменту времени, соответственно), мы связываем переменные v_z и v_p. Для получения установившегося периодического течения методом Ньютона с использованием явной схемы по координатам необходимо просчитать несколько полных периодов с очень малым шагом по времени (для обеспечения точности по координате и сходимости схемы). Для оптимизации численной схемы была выбрана неявная схема по координате и на каждом временном шаге решение находилось с помощью итерационного метода Ньютона–Рафсона. Погрешность вычислений не превышала 1% при разбиении сетки по координате на 50 узлов и $2 \cdot 10^5$ шагов по времени за 1 с.

4. Результаты

Расчеты проводились для следующих параметров: $r_1 = 0,5$ см, $h = 0,02 \cdot r_1$, $L = 2 \cdot r_1$, $\mu = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 780$ кг/м^3, $\rho_p = 2700$ кг/м^3, $\Delta P = 10^5$ Па, $f = 40$ Гц.

На рис. 2 показана зависимость силы $f_v(t) = b_f(\partial v_z(r_1)/\partial r)$, действующей на поршень со стороны жидкости. При совпадении знаков f_v и скорости поршня v_p эта сила ускоряет движение поршня (поршень увлекается потоком жидкости), а при различных знаках f_v проявляется как сила вязкого трения (уменьшает скорость поршня). Двоякая роль силы f_v объясняется тем, что на жидкость, как и на поршень, действует одинаковый градиент давления и в силу того, что инерция поршня выше ($a_p/b_p = \rho_p/\rho > 1$ в уравнении (6)), жидкость движется быстрее поршня и увлекает его за собой. В моменты, когда градиент давления меняет знак, поршень продолжает двигаться по инерции, а течение жидкости меняет свое направление и f_v действует как сила вязкого трения.

Отметим что, если убрать действие перепада давления на жидкость (т.е. убрать пуазейлевскую составляющую и оставить только сдвиговую), то f_v будет действовать как сила вязкого трения в любой момент времени. Это хорошо видно на рис. 3, где показаны профили скорости жидкости v_z в различные моменты времени. Видно, что при малых скоростях движения поршня v_p $(0,5$ и 1 период) профили скорости жидкости v_z соответствуют пуазейлевскому течению, а при больших скоростях v_p $(0,25$ и $0,75$ периода) реализуется сдвиговое течение.

Сила f_v по величине намного меньше силы, действующей на

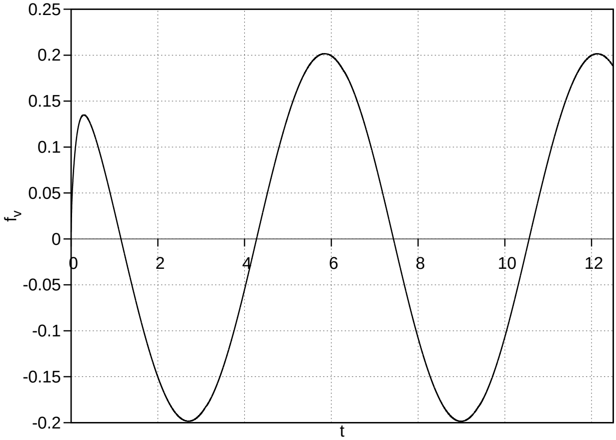

Рис. 2. Зависимость силы воздействия жидкости f_v на поршень

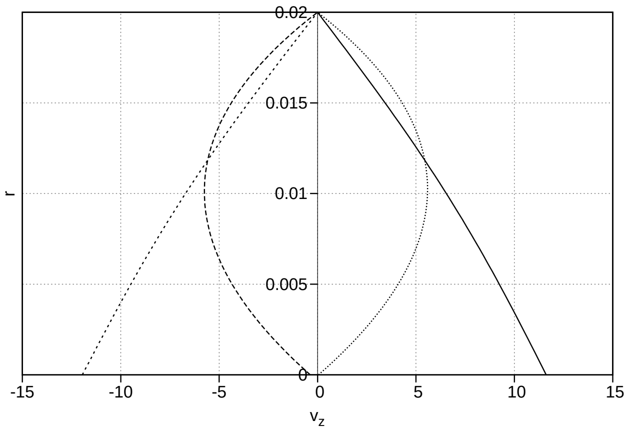

Рис. 3. Профили скорости жидкости $v_z(r)$ в различные моменты времени: 0,25 периода (—); 0,5 периода (– –); 0,75 периода (- -); 1 период (. . .)

поршень со стороны градиента давления b_p: $b_p/\max(f_v) \approx 55$, поэтому характер движения поршня с силой вязкого трения и без трения слабо различаются (отличия $\sim 2\%$).

Рассмотрим поведение системы при $h \to 0$, т.е. когда зазор между поршнем и трубой отсутствует и на поршень действует сила *сухого трения*. Если действующая на поршень сдвигающая сила F_1 мала, то поршень покоится из-за действия силы трения покоя $F_2 = -F_1$. При переходе F_1 через пороговое значение максимальной силы трения покоя, поршень начинает движение, и на него действует сила трения скольжения $F_g = \max(F_2)$. На рис. 4 показаны зависимости координаты поршня z от времени для различных значений силы F_g. Отметим, что при отсутствии и при наличии силы трения положения точки равновесия будут различными. Это объясняется тем, что в отсутствии трения скорость поршня в первую четверть периода растет, следующую четверть периода уменьшается до нуля, а смещение достигает максимального значения. В течение следующей половины периода скорость отрицательна и в конце поршень доходит до своего первоначального положения. Движение является периодическим с самого начала.

При наличии трения в течение первой четверти периода градиент давления уменьшается так, что $F_1 < F_g$ и за счет трения скольжения скорость падает до нуля еще до окончания первой четверти периода (без трения скорость падает до нуля в конце второй четверти периода). Во второй четверти периода поршень возвращается в свое первоначальное положение. В течение всей второй половины периода (за исключением моментов, когда $F_1 < F_g$) поршень движется в обратном направлении и проходит путь в два раза больший, чем в первую половину периода. Таким образом, за первый период поршень возвращается не в ту же точку, с которой начал свое движение. Со второго периода и далее движение становится уже периодическим, что хорошо видно из фазовых диаграмм (z, v_p) (рис. 5). При движении без трения получается предельный цикл, причем начало движения лежит на предельном цикле, а траектория находится в области

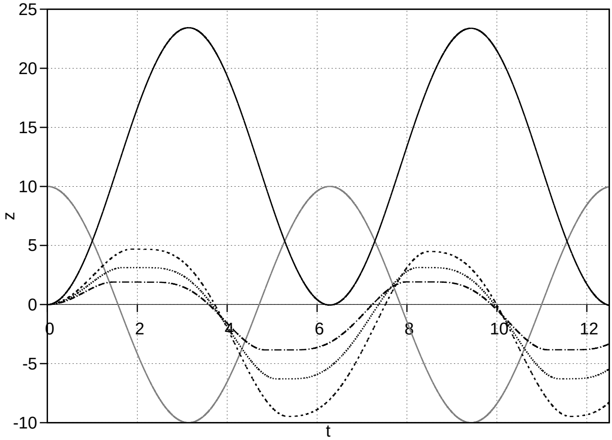

Рис. 4. Координаты положения поршня z от времени t (черные линии): без трения (—); $F_f = 6$ Н (– –); $F_f = 7$ Н (- -); $F_f = 8$ Н (. . .). Давление от времени (серая линия)

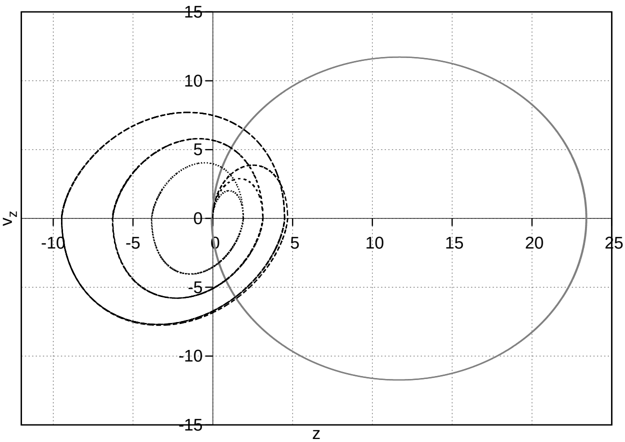

Рис. 5. Фазовые диаграммы для скорости поршня (z, v_p): без трения (—, серая линия); $F_g = 6$ Н (– –); $F_g = 7$ Н (- -); $F_g = 8$ Н (. . .)

$z \geqslant 0$. При наличии силы сухого трения траектория за первую половину периода выходит на предельный цикл (т.е. движение становится периодическим). Область, занимаемая предельным циклом, уменьшается с ростом силы трения скольжения F_g. В случае $F_g \geqslant F_1$ для любого момента времени предельный цикл вырождается в точку $(0, 0)$.

5. Заключение

В ходе работы было получено, что сила, действующая со стороны жидкости на поршень может приводить как к ускорению, так и к замедлению (вязкое трение) скорости поршня. Наличие сухого трения смещает положение равновесия и сдвиг по фазе относительно фазы градиента давления.

Список литературы

[1] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т 6. М.: Наука, 1988. 736 с.