

# Идентификация продольных надрезов балки по её собственным частотам

Ахтямов А.М.\*, Каримов А.Р.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа,

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Рассматриваются собственные частоты изгибных колебаний призматической балки с симметричными двусторонними продольными надрезами. Предложен метод, позволяющий вычислить параметры надрезов по двум частотам, взятым из разных спектров. Данные спектры принадлежат изгибным колебаниям в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, которые выбраны таким образом, что в обоих случаях нейтральная линия поперечного сечения параллельна сторонам. В статье также изучена зависимость собственной частоты от глубины нанесённого дефекта. Доказано, что значения частот рассматриваемой балки и идентичной балки без надрезов, не совпадают ни при какой величине дефектов.

## 1. Введение

Балки с различными формами сечения являются деталями многих несущих конструкций, в которых часто образуются трещины. В целях предотвращения крупных поломок возникает задача их ранней диагностики. Одним из вариантов выявления образовавшихся в стержне дефектов, а также определения их местоположения и размеров является анализ собственных частот колебаний.

Решаемая в статье задача связана с акустической диагностикой и обратными задачами математической физики. Данная работа отличается от традиционных [1–5] тем, что для восстановления искомого параметра используются не спектры одного вида колебаний с различными краевыми условиями, а спектры двух изгибных колебаний (вокруг разных осей балки) с неизменными условиями закрепления.

Открытые поперечные трещины снижают изгибную жесткость стержня, а, следовательно, и собственную частоту изгибных колебаний [1–5]. Возникает вопрос, характерна ли эта закономерность и для рассматриваемой двусторонней продольной трещины (надрез малой ширины)?

В статье показано, как изменяются собственные частоты изгибных колебаний балки в зависимости от глубины  $b$  дефектов. Также показано, что частоты балки с надрезами и бездефектной балки не совпадают ни при каких значениях  $b$ . Далее решается обратная задача — по двум собственным ча-

стотам, взятым из разных спектров, идентифицируются значения глубины  $b$  и ширины  $h$  надрезов.

## 2. Прямая задача

В настоящей работе рассматриваются изгибные колебания призматической балки и призматической балки аналогичного размера с двусторонними продольными надрезами, проходящими по всей длине. Поперечное сечение балки с надрезами изображено на рис. 1. Через  $B$  и  $H$  обозначены ширина и высота балки, через  $b$  и  $h$  — глубина и ширина надрезов, а через  $y$  и  $z$  — оси поперечного сечения.

Плотность  $\rho$  и модуль упругости  $E$  у обеих рассматриваемых балок одинаковы и являются константами. Через  $J_y^*$ ,  $J_z^*$ ,  $F^*$  обозначены, соответственно, моменты инерций и площадь поперечного сечения балки без надрезов, а через  $J_y$ ,  $J_z$ ,  $F$  — моменты инерций и площадь поперечного сечения балки с надрезами.

Рассмотрим случай жесткого закрепления левого конца и свободного правого (консольный стержень). Для балки без надрезов собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей сечения  $y$  и  $z$  обозначим, как  $\omega_i^{y*}$  и  $\omega_i^{z*}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) соответственно, а для балки с надрезами — как  $\omega_i^y$  и  $\omega_i^z$ . Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [6]:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $J$  — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси сече-

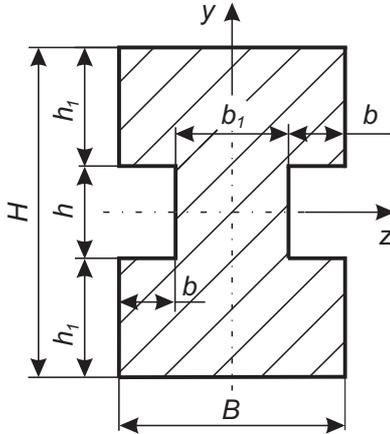


Рис. 1. Поперечное сечение балки с надрезами

ния, перпендикулярной плоскости колебаний;  $\rho$  — плотность;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $u$  — прогиб текущей оси стержня.

Уравнение (1) решаем методом разделения переменных. Временный множитель выделяется путем подстановки  $u = y(x) \cos \omega t$ , что для балки с постоянными по длине параметрами приводит к уравнению [6]:

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 y(x), \quad (2)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}, \quad (3)$$

$\omega$  — частотный параметр. Краевые условия принимают следующий вид:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0. \quad (4)$$

Решив систему из формул (2) и (4) получаем частотное уравнение:

$$\cosh \lambda l \cos \lambda l = -1. \quad (5)$$

Цель задачи определить значения параметров  $b$  и  $h$ , при которых выполняется соотношение  $\omega_i^y / \omega_i^{y*} = 1$  или  $\omega_i^z / \omega_i^{z*} = 1$ . Используя формулу (3), соотношения можно переписать в виде:

$$\frac{J_y^*}{F^*} = \frac{J_y}{F}, \quad (6)$$

$$\frac{J_z^*}{F^*} = \frac{J_z}{F}. \quad (7)$$

В статье также исследуются изменения частот в зависимости от увеличения глубины надреза.

Еще одной целью данной работы является решение обратной задачи, то есть задачи определения параметров надрезов по известным собственным частотам изгибных колебаний.

## 2.1. Проверка на возможность совпадения спектров частот изгибных колебаний бездефектной балки и балки с надрезами

Моменты инерций балки без надрезов и балки с надрезами [7] имеют вид:

$$J_y^* = \frac{HB^3}{12}, \quad (8)$$

$$J_y = \frac{h(B-2b)^3 + B^3(H-h)}{12} \quad (9)$$

— вокруг оси  $y$ ;

$$J_z^* = \frac{BH^3}{12}, \quad (10)$$

$$J_z = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12} \quad (11)$$

— вокруг оси  $z$ . А площади их поперечных сечений:

$$F^* = BH, \quad (12)$$

$$F = BH - 2bh. \quad (13)$$

Решив уравнение (6) относительно  $b$ , получим три корня, ни один из которых не лежит на интервале от  $(0, B/2)$ . Уравнение (7) также не имеет решений на данном интервале.

Таким образом, собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей  $y$  и  $z$  балок с надрезом и без надреза не совпадают ни при каких значениях  $b$  и  $h$ .

## 2.2. Зависимости отношений $\omega_i^y / \omega_i^{y*}$ и $\omega_i^z / \omega_i^{z*}$ от глубины надрезов $b$

Ввиду формулы

$$\frac{\omega_i^y}{\omega_i^{y*}} = \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} \lambda_i^2 / \sqrt{\frac{EJ_y^*}{\rho F^*}} \lambda_i^2 = \sqrt{\frac{J_y F^*}{J_y^* F}},$$

$i = 1, 2, \dots$ , заметим, что отношение  $\omega_i^y / \omega_i^{y*}$  не зависит от  $i$ . Аналогично и  $\omega_i^z / \omega_i^{z*}$ . Перепишем формулу заменив символом  $\beta$  все величины независимые от  $b$ :  $\omega_i^y / \omega_i^{y*} = \beta \sqrt{J_y / F}$ . Видим, что отношение частот пропорционально корню из  $J_y$ , и обратно пропорционально корню из  $F$ . На формулах (9), (11), (13) заметно, что увеличение глубины  $b$  надрезов приводит как к уменьшению площади поперечного сечения, так и к уменьшению момента инерции. Но площадь, в отличие от инерции, независимо от рассматриваемой оси колебаний, уменьшается равномерно ( $F' = -2h$ ).

Рассмотрим колебание сечений вокруг оси  $y$ . При увеличении глубины надреза  $b$  момент инерции  $J_y$  (а, следовательно и частота) начинает резко уменьшаться ( $J_y' = 2Bhb - 2hb^2 - B^2h/2$ ), так как сначала снимаются точки наиболее удаленные

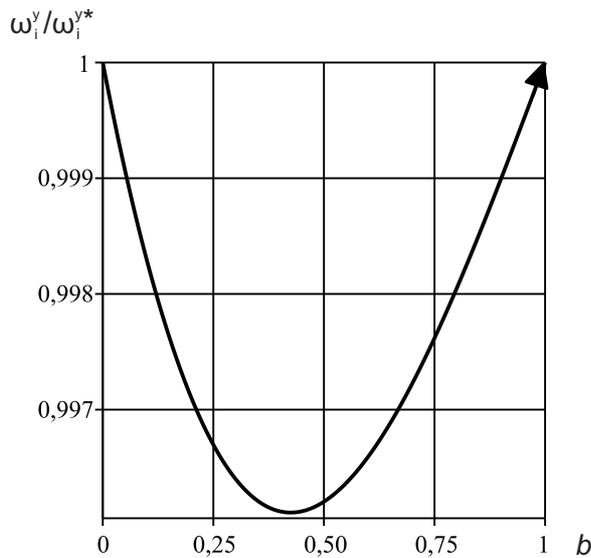


Рис. 2. Зависимости отношений  $\omega_i^y/\omega_i^{y*}$  от глубины надрезов  $b$

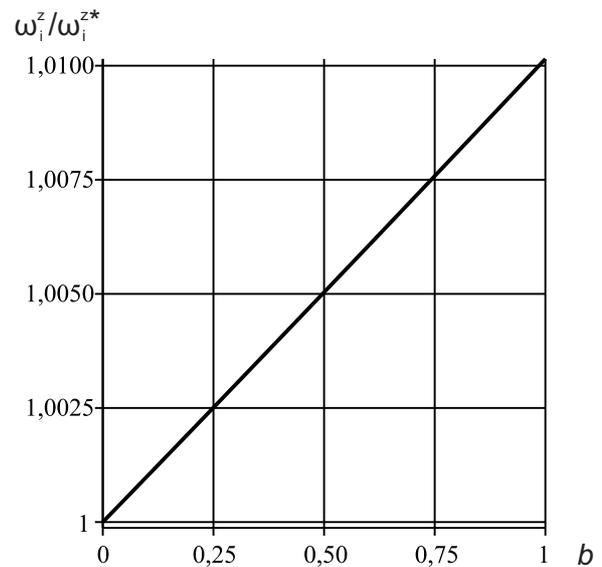


Рис. 3. Зависимости отношений  $\omega_i^z/\omega_i^{z*}$  от глубины надрезов  $b$

от нейтральной оси, то есть точки, обладающие максимальными нормальными напряжениями. Но в определенный момент, когда участок  $b \times h$ , соединяющий две половины сечения стержня, становится мал, колебания изменяют свое поведение так, что собственные частоты начинают увеличиваться, стремясь к значениям частот бездефектной балки. Описанные выше закономерности хорошо видны на графике (рис. 2). Теперь рассмотрим колебания сечений вокруг оси  $z$  (рис. 3). При увеличении глубины надреза  $b$  момент инерции уменьшается равномерно ( $J_z'$ ), притом немного медленнее, чем площадь  $F$ . Это связано с тем, что снимаемые точки равноудалены от оси  $z$  и потому обладают одинаковыми нормальными напряжениями. В результате отношение  $\omega_i^z/\omega_i^{z*}$  плавно возрастает.

### 3. Обратная задача — определение размеров надрезов

Необходимо определить ширину  $b$  и высоту  $h$  надрезов при известных собственных частотах изгибных колебаний. Воспользовавшись для этого формулой (3) видим, что она позволяет определить лишь отношение  $J_y/F = \rho(\omega_i^y)^2/E\lambda_i^4$ , которое может быть одинаково при различных  $b$  и  $h$ . По этой причине, для идентификации рассматриваемых надрезов, в расчетах необходимо использовать ещё один спектр частот изгибных колебаний. Действительно, ведь в таком случае, применив формулу (3) для колебаний вокруг оси  $z$ , можем найти численное значение второго соотноше-

ния:  $J_z/F = \rho(\omega_i^z)^2/E\lambda_i^4$ . Далее, зная  $J_y/F$  и  $J_z/F$ , при помощи формул (9), (11) и (13) легко найти параметры надрезов:

$$\begin{cases} \frac{J_y}{F} = \frac{h(B-2b)^3 + B^3(H-h)}{12BH - 24bh}, \\ \frac{J_z}{F} = \frac{BH^3 - 2bh^3}{12BH - 24bh}. \end{cases} \quad (14)$$

**Пример.** Консольная балка имеет параметры:  $B = 0,2$  м,  $H = 0,3$  м,  $L = 3$  м,  $\rho = 7720$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2,06 \cdot 10^{11}$  кг/м<sup>2</sup>. Собственные частоты изгибных колебаний вокруг осей  $y$  и  $z$  равны  $\omega_1^y = 116,235/$ ,  $\omega_1^z = 176,094$  рад/с. Требуется найти глубину  $b$  и ширину  $h$  надреза.

Решив трансцендентное уравнение (5) определяем собственное значение  $\lambda_1 = 0,625$  для балки данной длины. Используя собственные частоты рассчитываем  $J_y/F = 0,00331747039$  и  $J_z/F = 0,00761416751$ . Далее численно решив систему уравнений (14) получаем значения  $b = 0,0750$  и  $h = 0,0059$ .

### 4. Заключение

Проведенное исследование показывает, что спектр собственных частот изгибных колебаний балки с надрезами не совпадает со спектром балки без надрезов ни при каких значениях глубины  $b$ .

Установлено, что увеличение  $b$  приводит к росту собственных частот колебаний вокруг оси  $z$ . При этом, собственные частоты колебаний вокруг

оси  $y$  уменьшаются, но только до определённого момента, после которого начинают расти, стремясь к значениям частот балки шириной  $B$  без надрезов.

В статье также предложен метод, позволяющий идентифицировать параметры надрезов, используя два спектра частот изгибных колебаний вокруг разных осей.

### Список литературы

- [1] Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамик», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.
- [2] Gladwell G.M.L. On the scattering of waves in a non-uniform Euler-Bernoulli beam // Proc. Instn. Mech. Engrs. Mech. Science. 1991. № 205. P. 31–34.
- [3] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. № 5. С. 29–33.
- [4] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 5. С. 83–89.
- [5] Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики УНЦ РАН. 2007. С. 201–211.
- [6] Вибрации в технике: Справочник / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение. Т. 1. Колебания линейных систем. 1978. 352 с.
- [7] Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Высшэйшая школа, 1970. 630 с.