МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 517.957/.958

Построение точных решений уравнений анизотропной теплопроводности с помощью законов сохранения[1]

Ибрагимов Н.Х., Авдонина Е.Д.*

*Лаборатория «Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий»
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Недавно Н.Х. Ибрагимовым была доказана новая теорема о законах сохранения, используя понятие нелинейной самосопряженности, и предложен метод построения точных решений с помощью законов сохранения. В последующей работе авторов были построены законы сохранения для уравнений анизотропной теплопроводности. В данной работе предложенный метод применяется к уравнениям теплопроводности с источником в анизотропных средах. Получены новые точные решения этих уравнений.

1. Введение

Уравнение теплопроводности в анизотропной среде без источника имеет вид

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [g(u)u_y]_y + [h(u)u_z], \qquad (1)$$

где функции $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ положительны согласно своему физическому значению. Аналогичное уравнение с источником имеет вид

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z + q(u). \qquad (2)$$

2. Законы сохранения двумерной модели с источником специального вида

Двумерное уравнение

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + q(u) \qquad (3)$$

с произвольными функциями $f(u)$, $g(u)$ и $q(u) \neq 0$ обладает тремя симметриями, а именно группами переносов по времени и пространственным координатам с генераторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}. \qquad (4)$$

Уравнение (3) с произвольным источником $q(u)$ не является нелинейно-самосопряженным и потому не может быть написано в консервативной форме. В нашей работе [1] показано, что при некоторых специальных формах источника $q(u)$ уравнение(3) нелинейно самосопряженно. Одна из таких нелинейно самосопряженных форм следующая:

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + \omega^2\mathcal{F}(u), \qquad (5)$$

где $\omega = \mathrm{const}$ и

$$\mathcal{F}(u) = \int f(u)du. \qquad (6)$$

Соответственно, уравнение (5) обладает нетривиальными законами сохранения и, следовательно, может быть написано в консервативной форме. В работе [1] найдены законы сохранения уравнения (5), ассоциированные с симметрией относительно переноса по пространственной переменной x с генератором

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

А именно, оператор X_2 порождает следующие четыре сохраняющихся вектора:

$$\begin{gathered} C^1 = \sin(\omega x)\, u, \\ C^2 = -\sin(\omega x)\, f(u)u_x + \omega\cos(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -\sin(\omega x)\, g(u)u_y; \end{gathered} \qquad (7)$$

$$\begin{gathered} C^1 = \cos(\omega x)\, u, \\ C^2 = -\cos(\omega x) f(u)u_x - \omega\sin(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -\cos(\omega x)\, g(u)u_y; \end{gathered} \qquad (8)$$

$$\begin{gathered} C^1 = y\sin(\omega x)\, u, \\ C^2 = -y\sin(\omega x)\, f(u)u_x + \omega y\cos(\omega x)\, \mathcal{F}(u), \\ C^3 = -y\sin(\omega x)\, g(u)u_y + \sin(\omega x)\mathcal{G}(u); \end{gathered} \qquad (9)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 220, Договор № 11.G34.31.0042).

$$
\begin{gathered}
C^1 = y\cos(\omega x)\,u,\\
C^2 = -y\cos(\omega x)\,f(u)u_x - \omega y\sin(\omega x)\,\mathcal{F}(u),\\
C^3 = -y\cos(\omega x)\,g(u)u_y + \cos(\omega x)\mathcal{G}(u),
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\mathcal{F}$ первообразная функции $f(u)$ (формула (6)), а $\mathcal{G}$ — аналогичная первообразная для функции $g(u)$:

$$
\mathcal{G}(u) = \int g(u)du. \tag{11}
$$

3. Построение точных решений

Мы воспользуемся здесь законом сохранения

$$
D_t(C^1) + D_x(C^2) + D_y(C^3) = 0 \tag{12}
$$

для вектора (7) для того чтобы найти частное точное решение уравнения (5) с помощью метода предложенного в работе [2] (Часть 3: Использование законов сохранения для построения решений уравнений в частных производных). Согласно этому методу, мы заменяем закон сохранения (12) следующими более сильными условиями:

$$
D_t(C^1) = 0, \quad D_x(C^2) = 0, \quad D_y(C^3) = 0. \tag{13}
$$

Подставляя компоненту C^1 вектора (7) в первое уравнение системы (13), получаем

$$
D_t[\sin(\omega x)\,u] = \sin(\omega x)\,u_t = 0,
$$

откуда

$$
u_t = 0. \tag{14}
$$

Теперь подставим компоненту C^3 вектора (7) в третье уравнение системы (13) и получим

$$
(g(u)u_y)_y = 0. \tag{15}
$$

С учетом уравнений (14) и (15) исходное уравнение (5) принимает вид

$$
(f(u)u_x)_x + \omega^2\mathcal{F}(u) = 0. \tag{16}
$$

Из наших построений очевидно, что уравнение (16) равносильно второму уравнению системы (13). Наша задача — решить переопределенную систему уравнений (14), (15) и (16).

Уравнение (14) указывает на то, что мы имеем дело со стационарным решением $u = u(x, y)$.

Теперь решим уравнение (16). Для этого введем новую зависимую переменную z по формуле

$$
z = \mathcal{F}(u), \tag{17}
$$

и запишем уравнение (16) в виде

$$
z_{xx} + \omega^2 z = 0. \tag{18}
$$

Заметим, что последнее уравнение содержит переменную y как параметр. Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$
z = A_1(y)\sin(\omega x) + A_2(y)\cos(\omega x).
$$

С учетом обозначения (17) мы получаем решение уравнения (16) в следующем неявном виде:

$$
\mathcal{F}(u) = A_1(y)\sin(\omega x) + A_2(y)\cos(\omega x). \tag{19}
$$

Проверим, что функция u, заданная формулой (19), удовлетворяет уравнению (16). Дифференцируя обе части (19) по x, получаем

$$
\mathcal{F}'u_x = \omega[A_1\cos(\omega x) - A_2\sin(\omega x)].
$$

Но поскольку $\mathcal{F}'(u) = f(u)$, вышеприведенное уравнение дает

$$
(fu_x)_x = -\omega^2[A_1\sin(\omega x) + A_2\cos(\omega x)]. \tag{20}
$$

Уравнения (20) и (19) доказывают справедливость уравнения (16).

Остается удовлетворить условию (15). Дифференцируя обе части (19) по y, получаем

$$
\mathcal{F}'u_y = A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x).
$$

Т.к. $\mathcal{F}'(u) = f(u)$, то

$$
u_y = \frac{1}{f(u)}[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x)]. \tag{21}
$$

Поэтому

$$
g(u)u_y = \frac{g(u)}{f(u)}[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'(y)\cos(\omega x)]
$$

и, следовательно,

$$
\begin{gathered}
(gu_y)_y = \frac{g}{f}[A_1''(y)\sin(\omega(x) + A_2''(y)\cos(\omega x)]+\\
+[A_1'(y)\sin(\omega x) + A_2'\cos(\omega x)]\,\frac{fg' - gf'}{f^2}u_y.
\end{gathered}
$$

Подставив сюда выражение (21) для u_y, мы запишем уравнение (15) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
A_1''(y)\sin(\omega(x) + A_2''(y)\cos(\omega x)+\\
+\left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right)\frac{1}{f}[A_1'(y)\sin(\omega x)+\\
+A_2'\cos(\omega x)]^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Из уравнения (22) видно, что возможны два случая: либо

$$
A_1'(y) = A_2'(y) = 0, \tag{23}
$$

либо

$$A_1''(y) = A_2''(y) = 0, \quad \frac{g'}{g} = \frac{f'}{f} \cdot \tag{24}$$

Из условий (23) следует, что уравнение (5) имеет следующее точное решение, зависящее только от x :

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)\right), \tag{25}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

В случае (24) мы делаем вывод, что уравнение (5) с линейно зависимыми функциями f и g,

$$g(u) = kf(u), \quad k = \mathrm{const}, \tag{26}$$

имеет следующее точное решение:

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left((a_1 y + b_1)\sin(\omega x) + (a_2 y + b_2)\cos(\omega x)\right),$$

где a_i, b_i — произвольные постоянные.

Пример. Пусть

$$f(u) = \frac{1}{1+u^2},$$

тогда предыдущее утверждение состоит в том, что уравнение

$$u_t = \left(\frac{1}{1+u^2}\,u_x\right)_x + \left(k\frac{1}{1+u^2}\,u_y\right)_y + \omega^2 \arctan u$$

имеет следующее решение:

$$u = \tan\left((a_1 y + b_1)\sin(\omega x) + (a_2 y + b_2)\cos(\omega x)\right).$$

4. Заключение

Поступая таким образом со всеми остальными законами сохранения, мы получаем различные точные решения уравнений анизотропной теплопроводности.

Список литературы

[1] Ibragimov N.H., Avdonina E.D. Conservation laws of anisotripic heat equations. Archives of ALGA. Vol. 7/8, 2012. P. 13–22.

[2] Ibragimov N.H., Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws. Archives of ALGA. Vol. 7/8, 2010–2011. P. 1–99.