

Метод граничных элементов в численном исследовании трехмерных течений Стокса в каналах произвольной формы¹

Иткулова Ю.А.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем» БашГУ, Уфа
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе исследуются медленные трехмерные течения вязкой жидкости в цилиндрической трубе и канале переменного сечения. Построена качественная триангуляция поверхности цилиндрической трубы, сглаженного и экспериментального каналов переменного сечения. Задача решалась численно методом граничных элементов в нескольких модификациях для периодического и непериодического потока. Проведено сравнение полученных численных результатов с аналитическим решением для течения Пуазейля.

1. Введение

На сегодняшний день нет однозначных представлений о движении жидкости в пористых средах или каналах сложной геометрии, которые моделируют пористый пласт, поэтому исследование течений жидкости в каналах произвольной формы представляет большой интерес как для научной, так и для промышленной сфер.

Работа посвящена численному исследованию трехмерных течений Стокса вязкой жидкости в каналах сложной геометрии методом граничных элементов. Рассматриваемые задачи будут лежать в основе численного изучения эффекта динамического запыления эмульсий в микроканалах [1]. Метод граничных элементов для течений Стокса описан в [2] и успешно применялся для численного моделирования медленных двумерных течений в каналах [3]. Экспериментальным изучением поведения жидкости в сужающемся канале занимался Boger D.V. [4]. Теоретические исследования подобной задачи представлены в работах [5].

Для решения задачи применяется современная численная методика, основанная на методе граничных элементов, что уменьшает размерность пространства на единицу, так как все расчеты связаны только с границей. Используются неструктурированные треугольные сетки, точно описывающие границу области, что позволяет моделировать течения жидкости в каналах сложной геометрии.

2. Постановка задачи с периодическими и непериодическими условиями на границе

Рассматривалось течение вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью μ в ограниченном канале переменного сечения с гладкой поверхностью S при малых числах Рейнольдса (рис. 1). Движение жидкости описывалось уравнениями Стокса

$$\frac{1}{\mu} \nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Поверхность канала разбивается на два подмножества: $S = S^{(s)} \cup S^{(r)}$, где $S^{(r)}$ — жесткая граница (боковая поверхность канала) и $S^{(s)}$ — мягкая граница (торцы канала). Задача решалась со следующими граничными условиями:

– для непериодического потока

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{x} \in S, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}. \end{aligned} \quad (2)$$

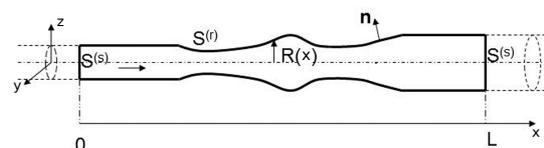


Рис. 1. Канал переменного сечения

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант 11.G34.31.0040).

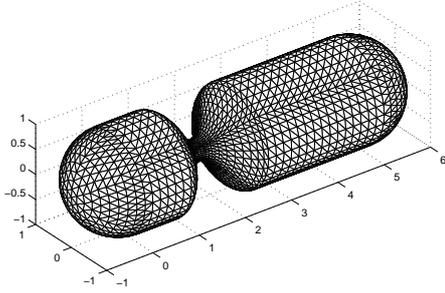


Рис. 2. Сглаженный канал переменного сечения

– для периодического потока

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in S^{(r)}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) &= \mathbf{u}(x, y, L), \\ \mathbf{f}(x, y, 0) &= -\mathbf{f}(x, y, L) + \mathbf{i}_z \Delta p. \end{aligned} \quad (3)$$

Обе постановки решались численно методом граничных элементов в нескольких модификациях.

3. Геометрия расчетной области

Предполагаем, что канал является осесимметричным радиуса $R(x)$ и длиной $x \in [0, L]$, где x — координата вдоль оси канала. Канал переменного сечения можно получить из кругового цилиндра аппроксимацией его вершин на аналитическую поверхность $R(x)$. Массивы граней таких моделей будут совпадать, т.е. фигуры будут с одинаковой топологией. Таким образом, построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения сводится к задаче формирования подобной сетки для кругового цилиндра.

Триангуляция боковой поверхности кругового цилиндра была получена из триангуляции 4-х связанных граней параллелепипеда, полученного из куба. На торцах цилиндра производилась триангуляция Делоне, затем сетки склеивались.

К сожалению, построенная триангуляция канала переменного сечения не удовлетворяла критериям качества сетки, так как равномерное разбиение вдоль образующей канала в сужающейся части давало «вытянутые» треугольники. Поэтому на горлышке канала необходимо было сгустить сетку. Для использования метода вершинных коллокаций в первой постановке задачи необходимо, чтобы поверхность была гладкой. Поэтому торцевые части пришлось вытянуть вдоль оси цилиндра. На рис. 2

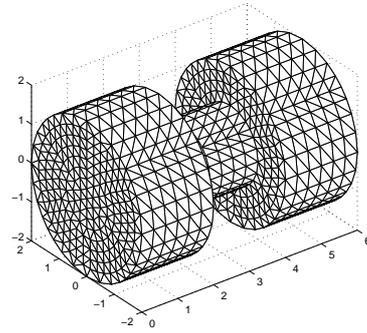


Рис. 3. Экспериментальный канал переменного сечения

представлена геометрия расчетной области канала для неперидического потока.

В случае периодического потока мы используем метод коллокаций в центре грани, для применения которого не требуется гладкости сетки. Таким образом, для моделирования течения жидкости с периодическими граничными условиями была получена триангуляция экспериментального канала, состоящего из трех цилиндров, двух колец и двух торцевых дисков (рис. 3)

4. Метод граничных элементов в нескольких модификациях

Уравнения Стокса (itkulova-eq1) переписывались в граничных интегралах [2, 6]. Сначала определялся вектор нормального напряжения \mathbf{f} на границе

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^0(\mathbf{y}) - \\ - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S, \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{G} — фундаментальное решение уравнения Стокса; \mathbf{T} — тензор напряжений, определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right), \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{r}|. \end{aligned} \quad (5)$$

Затем, значения скорости \mathbf{u} в любой точке области \mathbf{y} вычислялись через граничные интегралы

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V. \quad (6)$$

Для проверки достоверности полученных результатов задача также была решена модифицированным методом граничных элементов, который заключается в следующем.

Нам известно точное решение для течения Пуазейля, которому задавалось возмущение

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'. \quad (7)$$

Граничные условия (2) для возмущений \mathbf{u}' и \mathbf{f}' выглядят следующим образом

$$\mathbf{u}' = 0, \quad \mathbf{x} \in S^{(s)}, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}^0, \quad \mathbf{x} \in S^{(r)}, \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}. \quad (8)$$

Из интегральных уравнений (4)–(6), которым также удовлетворяют возмущения \mathbf{u}' и \mathbf{f}' , находились их значения. С учетом (7) определялся вектор нормального напряжения \mathbf{f} на границе и компоненты скорости \mathbf{u} в любой точке области.

Для периодического потока уравнения Стокса (1) переписывались в граничных интегралах

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \\ = \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегральные уравнения (9) переписываются в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{G}. \quad (10)$$

Граничные условия будут выглядеть

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{f}_p = \mathbf{i}_x \Delta p, \\ \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_r, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{f}_3 = -\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_p, \end{aligned} \quad (11)$$

где 1 — боковая поверхность; 2 — входное сечение; 3 — выходное сечение.

Из (9) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $(\mathbf{u}_s, \mathbf{f}_s, \mathbf{f}_r)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_{13} - \mathbf{B}_{12} & -\mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{A}_{22} + \mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_{23} - \mathbf{B}_{22} & -\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{32} + \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{33} - \mathbf{B}_{32} & -\mathbf{B}_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{13}\mathbf{f}_p \\ \mathbf{B}_{23}\mathbf{f}_p \\ \mathbf{B}_{33}\mathbf{f}_p \end{pmatrix}. \quad (12)$$

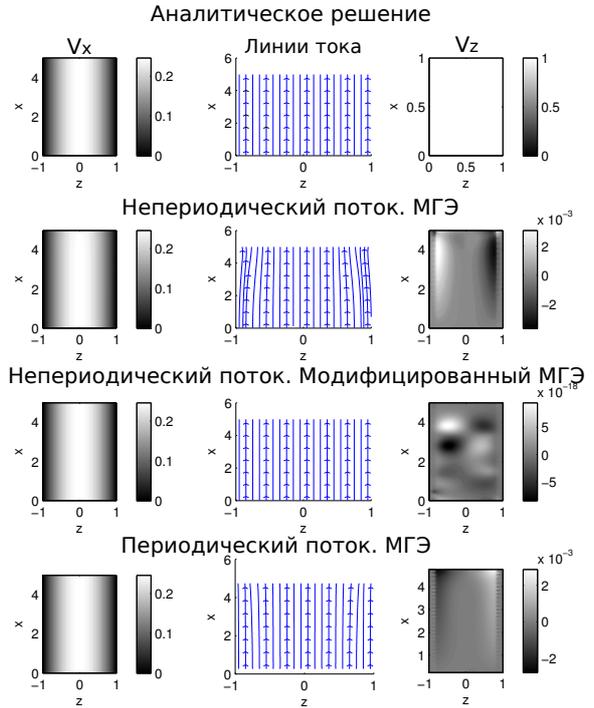


Рис. 4. Сравнение модификаций МГЭ с аналитическим решением

Сингулярные интегралы рассчитывались, используя известные тестовые решения: постоянное и линейное течения.

5. Результаты численного моделирования

Для тестирования программы использовался канал со входным и выходным сечениями радиуса $R = 1$, радиусом сужения $r = 0.5$ и длиной $L = 5$.

Проведено сравнение компонент вектора нормального напряжения \mathbf{f} на границе методом граничных элементов в нескольких модификациях с аналитическим решением для течения Пуазейля для непериодического потока. Погрешность вычисления неизвестных значений на границе составила порядка 0.7%. Для периодического потока погрешность компонент вектора нормального напряжения \mathbf{f} на границе составила порядка 0.24%, компонент вектора скорости \mathbf{u} около 0.9%.

На рис. 4 представлены поля скорости и линии тока, вычисленные в осевом сечении цилиндра плоскостью Oxz , для течения Пуазейля с $N = 2598$ в методе вершинных колокаций и $N = 2704$ в методе колокаций с центром в грани элемента. Из ри-

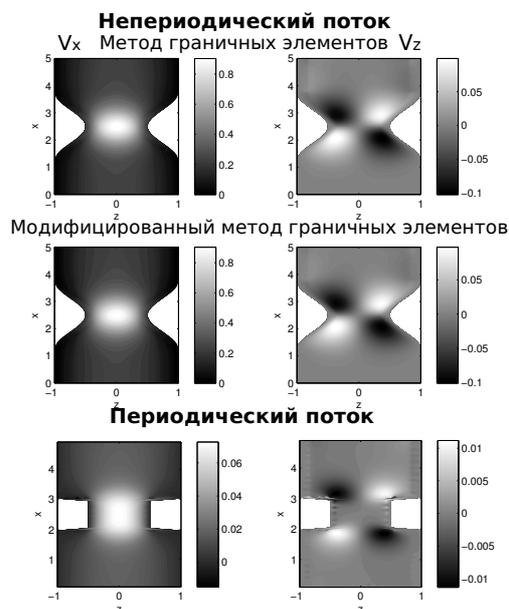


Рис. 5. Канал переменного сечения

сунка видно, что численные расчеты хорошо приближаются к аналитическому решению. Модифицированный метод граничных элементов, особенно для компонент скорости вдоль оси Oz , дает более точные результаты по сравнению с обычным методом граничных элементов.

Получены численные результаты для канала различного радиуса сужения методом граничных элементов в двух модификациях и проведено сравнение этих вариантов метода. В результате, относительная погрешность составила порядка 0.1–1.7% в зависимости от формы канала. По мере уменьшения радиуса сужения канала погрешность увеличивается и максимальное значение 1.7% принимает на

цилиндрическом канале. На рис. 5 представлены поля скорости для каналов разной геометрии и радиусом сужения $r = 0.5$. Сглаженный канал состоит из 2598 вершин и 5192 граней, экспериментальный — из 1354 вершин и 2704 граней. Таким образом количество расчетных узлов $N = 2704$ находится в пределах 3000 узлов. На границе сингулярные интегралы вычисляются не точно, что ведет к большой погрешности вычисления поля скорости в точках, лежащих близко к стенке канала. Наблюдаемый эффект на входе для периодического потока качественно совпадает с экспериментальным [4] и приближенным аналитическим решением [5].

Список литературы

- [1] Ахметов А.Т., Саметов С.П. Особенности течения дисперсии из микрокапель воды в микроканалах // Письма в ЖТФ. 2010. Том 36, вып. 22. С. 21–28.
- [2] Pozrikidis C. BoundaryIntegral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).
- [3] Pozrikidis C. Creeping flow in two-dimensional channels // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 180. P. 495–514.
- [4] Boger D.V. Viscoelastic flows through contractions // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 19. P. 157–182.
- [5] Lubansky A.S., Boger D.V., Servais C. Burbidge A.S. Cooper-White J.J. An approximate solution to flow through a contraction for high Trouton ratio fluids // Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. Vol. 144. P. 87–97.
- [6] Бреббия К. Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.