

Новые результаты в теории гидродинамической устойчивости двухфазных потоков¹

Осипцов А.Н., Боронин С.А.

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

В рамках модели взаимопроникающих континуумов проведено исследование устойчивости плоскопараллельных потоков дисперсных сред в различных постановках, учитывающих новые факторы: рассогласование скоростей фаз и неоднородность распределения частиц в основном течении, нестоксовские компоненты межфазной силы, конечность объемной доли частиц. Получено, что учет этих факторов приводит к существенному изменению параметров наиболее неустойчивой моды и изменению критического числа Рейнольдса двухфазных потоков. Предложен метод исследования алгебраической (немодальной) неустойчивости и поиска оптимальных возмущений дисперсных течений. На примере неоднородного потока запыленного газа в плоском канале показано, что возмущения двухфазной среды, обладающие максимальной кинетической энергией на заданном конечном интервале времени, являются вытянутыми вдоль потока структурами («streaks»). По сравнению со случаем чистой жидкости, оптимальные возмущения запыленного газа обладают в несколько раз большей кинетической энергией уже при массовой концентрации частиц в десять процентов, что означает заметное усиление немодальной неустойчивости потока при наличии взвешенных включений.

1. Введение

До настоящего времени исследование устойчивости плоскопараллельных течений дисперсных сред проводилось в рамках классического линейного подхода. В этом подходе малое возмущение начального стационарного плоскопараллельного течения дисперсной среды разлагается в ряд по базисным функциям, являющимися бегущими вдоль оси течения плоскими волнами. Результатом исследования является анализ скорости нарастания наиболее неустойчивой волны, что позволяет сделать вывод об экспоненциальной устойчивости либо неустойчивости потока на больших временах. Впервые такая постановка для дисперсной среды была использована в [1]. В недавних работах авторов эта постановка была модифицирована с учетом рассогласования скоростей фаз и стратификации примеси в основном течении, подъемных сил, действующих на частицы в сдвиговом потоке, а также конечного объемного содержания дисперсной фазы. В рамках такого подхода проведено параметрическое исследование нейтральных кривых для ряда типичных течений (течение в канале, слое смешения, пограничном слое). Подробный обзор литературы по

устойчивости дисперсных течений приведен в [2].

В настоящее время в литературе активно развивается немодальный метод исследования устойчивости стационарных потоков однофазных сред, также основанный на линейном приближении. Это связано с тем, что уже в 80-х годах прошлого века было показано, что энергия некоторых малых трехмерных возмущений сдвиговых потоков невязких несжимаемых сплошных сред нарастает линейно со временем независимо от параметров наиболее неустойчивой моды [3]. При наличии вязкости данный механизм нарастания возмущений, как правило, подавляется лишь на достаточно больших временах. Подобная (алгебраическая) неустойчивость связывается с формированием продольных полосчатых структур в различных потоках сплошных сред, наблюдаемых в экспериментах и предшествующих переходу к турбулентному режиму [4]. Физически алгебраическая неустойчивость появляется ввиду взаимодействия различных гармоник, являющихся базисными решениями соответствующего уравнения Орра-Зоммерфельда и уравнения для нормальной компоненты завихренности. Несмотря на то, что устойчивость потоков на больших временах определяется максимальной скоростью нарастания отдельных гармоник (классическая теория линейной устойчивости), на конечных временах сумма отдельных гармоник может создать возму-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-3582.2011.1) и РФФИ (№ 11-01-00483).

щение, энергия которого будет на несколько порядков больше начального значения (оптимальное возмущение). Подобный ограниченный во времени резкий рост возмущений может привести к возникновению вторичной (конечноамплитудной) неустойчивости и переходу к турбулентности. Таким образом, исследование экспоненциальной устойчивости потоков сплошных сред в линейном приближении необходимо дополнить анализом оптимальных трехмерных возмущений. Ранее подобный анализ проводился в литературе для нескольких типичных сдвиговых плоскопараллельных течений чистых жидкостей [5], но для дисперсных потоков такой анализ до сих пор не был выполнен.

2. Модель дисперсной среды

Для описания течений дисперсных сред используется модель взаимопроникающих континуумов [6] с модификациями, позволяющими учесть конечную объемную долю частиц [7]. Полная система уравнений в безразмерном виде такова:

$$\operatorname{div}((1-C)\mathbf{v} + C\mathbf{v}_s) = 0, \quad (1)$$

$$(1-C)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \eta C\frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}}\nabla_j\tau^{ij}\mathbf{e}_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(C\mathbf{v}_s) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = \beta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \left(1 + \sqrt{\frac{9C}{2}}\right), \quad (4)$$

$$\tau^{ij} = 2\mu(C) \left(e^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}\right),$$

$$e^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i), \quad \mu = 1 + \frac{5}{2}C,$$

$$\operatorname{Re} = \frac{U_0 L \rho^0}{\mu_0}, \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu_0 L}{mU_0}, \quad \eta = \frac{\rho_s^0}{\rho^0}.$$

Здесь ρ^0 и ρ_s^0 — плотности материалов фаз; \mathbf{v} и \mathbf{v}_s — скорости несущей и дисперсной фаз; C — объемная доля включений; σ, m — радиус и масса частиц; τ^{ij} — компоненты тензора вязких напряжений суспензии; e^{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций несущей фазы; μ_0, μ — вязкости несущей фазы и суспензии; δ^{ij} — символы Кронекера, \mathbf{e}_i — базисные векторы. В качестве масштабов взяты характерная скорость U_0 и длина L течения. Безразмерные параметры задачи включают: Re — число Рейнольдса; β — параметр инерционности частиц (отношение масштаба длины задачи к стоксовской длине релаксации частиц); η — отношение плотностей материалов фаз.

Межфазное взаимодействие описывается силой Стокса с поправкой на объемную долю частиц в форме Бринкмана, выражение которой приведено в

правой части уравнения (4). При течении двухфазной среды в канале остальные компоненты межфазной силы малы при условии [7]

$$\frac{\sigma}{L} \ll \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}}}.$$

Система уравнений, описывающая течение дисперсной среды с пренебрежимо малой объемной долей включений (запыленный газ), может быть получена из уравнений (1)–(4) предельным переходом $C \rightarrow 0$, $C\eta = O(1)$. В число определяющих параметров задачи вместо отношения плотностей фаз η войдет массовая концентрация включений $\alpha = n_0 m / \rho^0$, где n_0 — масштаб числовой концентрации частиц.

3. Модальная устойчивость плоскопараллельных течений дисперсных сред

Приведем основные результаты исследований классической устойчивости плоскопараллельных потоков двухфазных сред, полученных авторами в [2, 7–10]. Во всех случаях линеаризованная система уравнений движения дисперсной среды для возмущений в виде бегущих волн сведена к одному обыкновенному уравнению четвертого порядка для амплитуды возмущения функции тока (модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда). Для поиска собственного значения, соответствующего волне с наибольшим инкрементом нарастания, использован метод ортогонализации [11].

3.1. Устойчивость течения запыленного газа в вертикальном канале

Влияние рассогласования скоростей фаз в основном течении на устойчивость двухфазного потока рассмотрена на примере восходящего и нисходящего течений запыленного газа в вертикальном плоском канале с учетом силы тяжести, масштаб которой определяется числом Фруда $\operatorname{Fr} = U_0 / \sqrt{gL}$. Скорость основного течения несущей фазы $U(y)$ описывается профилем Пуазейля, а скорость частиц $U_s(y)$ отличается на константу, соответствующую стоксовской скорости оседания одиночной частицы:

$$U(y) = 1 - y^2, \quad U_s(y) = U(y) + \frac{I}{\operatorname{Fr}^2\beta}.$$

Параметр I задает направление потока: $I = 1$ — нисходящее течение, $I = -1$ — восходящее.

Проведено исследование зависимости инкремента нарастания наиболее неустойчивой моды от

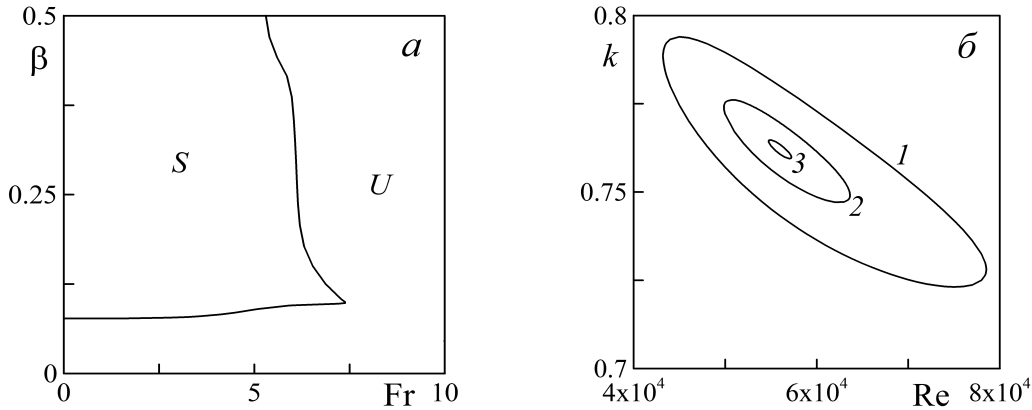


Рис. 1. Область устойчивости S и неустойчивости U в плоскости параметров (Fr, β) (а) и нейтральные кривые при $\beta = 0.09$, кривые 1–3 соответствуют $Fr = 0.86, 0.84, 0.8362$ (б). $I = 1, \alpha = 0.1$

определяющих безразмерных параметров. Получено что, независимо от направления течения, в плоскости параметров (Fr, β) существует область, в которой течение устойчиво при любом значении числа Рейнольдса (рис. 1(а)). Нейтральные кривые замкнуты при любых значениях определяющих параметров, а при приближении к границе области неустойчивости они сжимаются в точку и исчезают (рис. 1(б)). Таким образом, наличие рассогласования скоростей фаз, вызванного гравитационным осаждением частиц, приводит к существенной стабилизации течения запыленного газа.

3.2. Устойчивость течения запыленного газа в пограничном слое

При течении запыленного газа в пограничном слое для корректного описания межфазного взаимодействия необходимо учитывать подъемную силу Сэфмана, вызванную неоднородностью скорости потока на масштабе частицы:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{j} 6.46\sigma^2(u - u_s) \sqrt{\mu\rho \frac{\partial u}{\partial y}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Орт \mathbf{j} перпендикулярен направлению потока. Рассмотрим течение запыленного газа в равновесной по скоростям области пограничного слоя, где скорости обеих фаз описываются модифицированным профилем Блазиуса

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_s = \{U(\zeta), 0\}, \\ U(\zeta) = U_B \left(\zeta(1 + \alpha)^{1/2} \right), \quad \zeta = y^* \sqrt{\frac{U_0\rho}{\mu x^*}}.$$

Здесь $U_B(\cdot)$ — профиль Блазиуса; x^* и y^* — размерные величины.

В качестве масштаба длины рассматривается локальная толщина пограничного слоя $\delta(x) = \sqrt{\mu x / U_0\rho}$, где x — некоторое значение продольной

координаты. Тогда профиль скорости задается следующим соотношением:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_s = \{U(y), 0\}, \quad y = \frac{y^*}{\delta} = \zeta.$$

В зависимости от соотношений сил Стокса и Сэфмана в неоднородной по скоростям фаз области пограничного слоя, в рассматриваемой области течения формируются различные неоднородные профили концентрации частиц. Рассмотрены три модельных профиля концентрации включений

$$N_1 = 1 + \exp(-y), \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 1 - 0.5 \exp(-y).$$

Получено, что течение запыленного газа в пограничном слое наиболее устойчиво при накоплении дисперсной фазы по направлению к стенке (рис. 2(а), кривая 1). Максимальное значение критического числа Рейнольдса достигается для частиц с длиной релаксации порядка локальной толщины пограничного слоя. Наличие подъемной силы приводит к дальнейшему усилению устойчивости течения для $\beta \sim 0.1$. Критическое число Рейнольдса возрастает нелинейно при увеличении α (рис. 2(б)).

3.3. Устойчивость плоских течений Пуазейля и Куэтта суспензии

При описании течений суспензий, в которых отношение плотностей фаз может изменяться в широком диапазоне, необходимо учитывать конечную объемную долю частиц C . В первом приближении по C течение дисперсной среды описывается уравнениями (1)–(4) [9]. Рассматривается устойчивость двух типов плоскопараллельных стационарных течений суспензии между двумя плоскими стенками: (а) напорное, при котором стенки не движутся друг относительно друга (течение Пуазейля), и (б) течение с нулевым перепадом давления вдоль

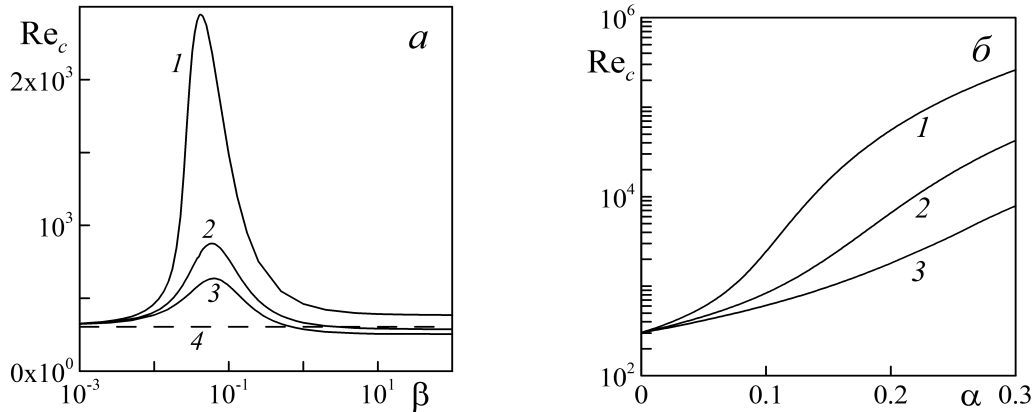


Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_c от параметра инерционности частиц β при $\alpha = 0.1$ (а) и зависимость Re_c от массовой концентрации включений α при $\beta = 0.08$ (б). Кривые 1–3 соответствуют профилям концентрации N_1 , N_2 , N_3 , кривая 4 соответствует течению чистой жидкости.

пластин, вызванное движением стенок друг относительно друга (течение Куэтта). В обоих случаях рассогласование скоростей фаз в основном течении отсутствует, профиль скорости неоднороден и задается аналитически:

$$C_0(y) = \begin{cases} C_1 + (C_2 - C_1) \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{\varepsilon^2}\right), & y \in [y_0, 1], \\ C_2, & y \in [-y_0, y_0], \\ C_1 + (C_2 - C_1) \exp\left(-\frac{(y+y_0)^2}{\varepsilon^2}\right), & y \in [-1, -y_0]. \end{cases}$$

Профили скорости для течений Пуазейля $U_1(y)$ и Куэтта $U_2(y)$ задаются дифференциальным уравнением с граничными условиями прилипания на твердых стенках:

$$\frac{d}{dy} (\mu(C_0(y)) U'(y)) = 0, \\ U_1(-1) = 0, U_1(1) = 0; U_2(-1) = -1, U_2(1) = 1.$$

Получено, что для обоих типов течений неоднородное распределение включений в основном потоке двухфазной среды, вызывающее стратификацию вязкости суспензии, приводит к появлению неустойчивых мод уже при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса (рис. 3(а)). В отличие от течения чистой жидкости, существуют неустойчивые волны двух типов: симметричные и антисимметричные (рис. 3(а), кривые 1, 2). При высоких значениях числа Рейнольдса указанная неустойчивость подавляется и устойчивость потока определяется волнами типа Толлмина–Шлихтинга (рис. 3(а), кривая 3). Исследована зависимость устойчивости потока от параметров профиля концентрации частиц и получено, что волны с наибольшим инкрементом нарастания соответствуют случаю, когда частицы распределены внутри течения на некотором расстоянии от стенок $y_0 \sim 0.4$ (рис. 3(б)). Неустойчивость течений с «широкими» $y_0 > 0.9$ и «узкими»

$y_0 < 0.15$ распределениями включений определяется волнами Толлмина–Шлихтинга, появляющимися при $Re \sim 10^4$.

4. Немодальная устойчивость дисперсных потоков и оптимальные возмущения

Анализ гидродинамической неустойчивости дисперсных течений является неполным без анализа оптимальных возмущений [12]. В отличие от классического анализа устойчивости, для корректного исследования алгебраической неустойчивости необходимо найти систему трехмерных нормальных мод вида

$$Q(x, y, z) = q(y) \exp\{i(k_x x + k_z z) + \sigma t\}.$$

Здесь k_x , k_z — вещественные волновые числа; σ — комплексный инкремент нарастания мод. При постановке указанных возмущений в линеаризованные уравнения движения запыленного газа получим два дифференциальных уравнения (модифицированные уравнения Орра–Зоммерфельда и Сквайра) и три алгебраических соотношения относительно амплитуд нормальных компонент скоростей и завихренностей фаз v , ω , v_s , ω_s и дивергенции скорости частиц I_s .

Общее решение сформулированной задачи на собственные значения для фиксированных значений безразмерных параметров строится в виде ряда нормальных мод:

$$Q(x, y, z, t) = \sum_n \gamma_n \mathbf{q}_n(y) \exp\{i(k_x x + k_z z) + \sigma_n t\}. \quad (5)$$

Анализ алгебраической неустойчивости основан на поиске такой комбинации мод, которая бы в некотором смысле нарастала максимально к задан-

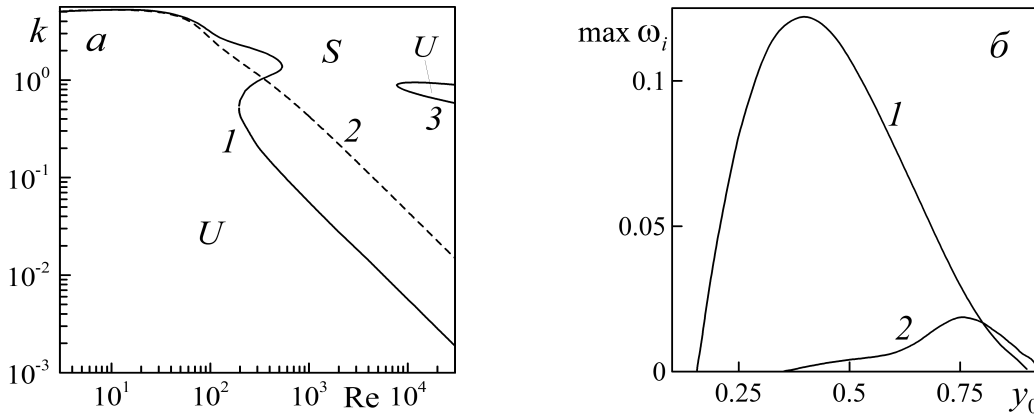


Рис. 3. Области устойчивости 'S' и неустойчивости 'U' в плоскости параметров (k, Re) , кривые 1–2 соответствуют нейтральным кривым для симметричных и антисимметричных возмущений, 3 — нейтральная кривая для возмущений типа Толлмина–Шлихтинга (а); и зависимость максимального инкремента нарастания возмущений $\max \omega_i$ от ширины распределения частиц y_0 , кривые 1, 2 соответствуют $Re = 10$ и 1000 . (б). Течение Пуазейля $U_1(y)$, $\eta = 7$, $\beta = 5$, $C_1 = 0.05\%$, $C_2 = 5\%$, $\varepsilon = 0.1$, $y_0 = 0.5$

ному моменту времени. Соответствующее возмущение вида (5) принято называть оптимальным. Для оценки нарастания возмущений введем норму, являющуюся плотностью кинетической энергии возмущений несущей фазы [12]:

$$E(\gamma, t) = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left(v^* v + \frac{1}{k^2} \left(\frac{dv^*}{dy} \frac{dv}{dy} + \omega^* \omega \right) \right) dy. \quad (6)$$

Необходимо найти комбинацию нормальных мод (5) с вектором спектральной проекции γ , максимизирующую функционал энергии (6) при условии, что начальная энергия возмущения равна единице. Поиск нормальных мод исходной системы линейных уравнений и оптимизация функционала энергии были осуществлены на основе QR-алгоритма.

Проведено исследование оптимальных возмущений течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц в виде двух пылевых слоев, расположенных на равных расстояниях от стенок:

$$N(y) = 0.5 N_0(\delta, \xi) \left(\exp \left\{ -\frac{(y-\xi)^2}{\delta^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(y+\xi)^2}{\delta^2} \right\} \right).$$

Здесь параметр $\xi \in [0, 1]$ определяет положение слоев, а δ задает их ширину. При $\xi = 0$ имеем один слой в окрестности центральной плоскости течения. Коэффициент N_0 выбирается таким образом, чтобы сохранить постоянным общее число частиц в потоке при заданном значении средней массовой концентрации α .

Получено, что в широком диапазоне определяющих параметров энергия оптимальных возмущений течения запыленного газа выше, чем для ана-

логичного течения чистой жидкости. Вне зависимости от профиля концентрации частиц максимум плотности кинетической энергии оптимальных возмущений в пространстве волновых чисел (k_x, k_z) достигается для $k_x = 0$, $k_z \approx 2.0$, что соответствует полосчатым структурам, вытянутым в направлении потока. При однородной концентрации включений плотность кинетической энергии оптимальных возмущений больше таковой для случая течения чистой жидкости и увеличивается с ростом массовой концентрации включений по закону, близкому к $(1 + \alpha)^2$. В случае неоднородного профиля концентрации частиц при фиксированной их средней массовой концентрации α наибольшее влияние на оптимальные возмущения оказывает распределение включений в области посередине между центральной осью и стенками течения $\xi \sim 0.5$ (рис. 4(а)). Уменьшение ширины пылевых слоев приводит к значительному увеличению энергии глобальных оптимальных возмущений. Характерный вид оптимальных возмущений продольной компоненты скорости несущей фазы u , подверженной наибольшему росту, представлен на рис. 4(б, в). Максимум энергии начальных оптимальных возмущений находится в окрестности пылевых слоев в отличие от случая чистой жидкости [5].

5. Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что новые факторы, не учитываемые ранее в литературе по неустойчивости дисперсных потоков, существенно изменяют границы режима устойчивости двухфазных течений. Так, рассогласование скоростей фаз, вызванное гравитационным осаждением частиц, приводит к полной

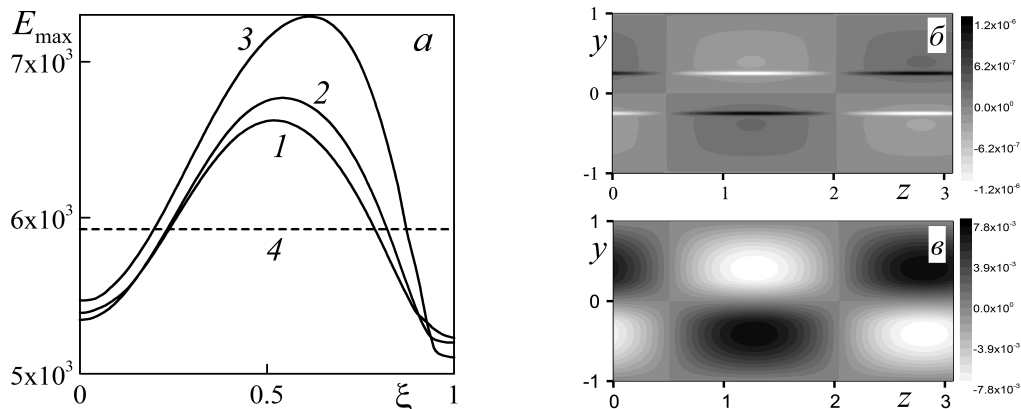


Рис. 4. Зависимость максимума плотности кинетической энергии оптимальных возмущений E_{\max} от положения слоев дисперсной фазы ξ при $\alpha = 0.1$, $\delta = 0.1, 0.05, 0.02$ (1–3), 4 – однородное распределение частиц (а), и распределение продольной компоненты скорости оптимальных возмущений несущей фазы u в плоскости (y, z) при $t = 0$ (б) и в момент достижения максимума плотности энергии (в) для $\xi = 0.25$, $\alpha = 0.2$. $k_x = 0$, $k_z = 2.044$, $Re = 5000$, $\beta = 10$

стабилизации течения в широком диапазоне параметров, а стратифицированное течение суспензии с конечной объемной долей включений неустойчиво уже при малых значениях числа Рейнольдса. При течении запыленного газа в пограничном слое с учетом подъемных сил, действующих на частицы, существенная стабилизация течения имеет место в случае частиц с параметром инерционности порядка единицы. Классический анализ устойчивости двухфазных потоков дополнен анализом оптимальных возмущений. Показано, что энергия оптимальных возмущений в неоднородно запыленном течении Пуазейля существенно зависит от распределения частиц в основном течении и максимальна в случае, когда частицы сосредоточены посередине между стенками и плоскостью симметрии течения. Форма оптимальных возмущений соответствует «полосчатым структурам», как и в случае чистой жидкости.

Список литературы

- [1] Saffman P.G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt. 1. P. 120–128.
- [2] Боронин С.А., Осипцов А.Н. Устойчивость течения дисперсной смеси в пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 76–87.
- [3] Landahl M.L. A note on algebraic instability of inviscid parallel shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. P. 243–251.
- [4] Alfredsson P.H., Bakchinov A.A., Kozlov V.V., Matsubara M. Laminar-turbulent transition at a high level of free stream turbulence // In: Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers. Eds. P.W. Duck, P. Hall. Dordrecht, Kluwer, 1996. P. 423–436.
- [5] Butler K., Farrel B. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 8. P. 1637–1650.
- [6] Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446.
- [7] Боронин С.А. Исследование устойчивости течения суспензии в плоском канале с учетом конечной объемной доли частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 40–53.
- [8] Боронин С.А. Устойчивость восходящего и нисходящего течений запыленного газа в канале с учетом силы тяжести // В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых. Октябрь 2006 г. Под ред. Черного Г.Г., Самсонова В.А. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. С. 79–86.
- [9] Боронин С.А. Гидродинамическая устойчивость стратифицированного течения суспензии в плоском канале // Доклады РАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 477–480.
- [10] Боронин С.А. Устойчивость плоского течения Куэтта дисперсной среды с конечной объемной долей частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 1. С. 85–94.
- [11] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
- [12] Боронин С.А. Оптимальные возмущения течения запыленного газа в плоском канале с неоднородным распределением частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 74–88.