МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 533:517.958

Движение газа в цилиндрическом спиралевидном канале без вращения[1]

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Изучено распространение плоских, сферических и цилиндрических волн в парогазовых смесях с полидисперсными частицами и каплями, когда одна из фракций участвует в фазовых превращениях. Получено дисперсионное соотношение, рассчитаны дисперсионные кривые. Проанализировано влияние полидисперсности частиц и капель на дисперсию и диссипацию малых возмущений.

Трехмерные подалгебры, допускаемые уравнением газовой динамики с общим уравнением состояния, задают инвариантные решения, которые определяются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для трех подалгебр системы сводятся к неавтономным второго порядка [1]. Рассмотрим одну из них с номерами 3.4 из оптимальной системы [1] с базисом операторов:

$$X_1 = \partial_x, \quad \alpha X_4 + X_7 = a(t\partial_x + \partial_U) + \partial_\theta,$$

$$\beta X_4 + X_{11} = b\partial_U + t\partial_t + (bt + x)\partial_x + r\partial_r,$$

где α, β — действительные параметры неподобных подалгебр; t, x, r, θ — цилиндрические координаты. Инварианты задают представление газодинамических величин:

$$\begin{gathered} U = \alpha\theta + \beta \ln|t| + U_1(s),\ V = V(s), \\ W = W(s),\ \rho = \rho(s),\ S = S(s); s = rt^{-1}, \end{gathered} \tag{1}$$

— цилиндрические координаты скорости, плотность и энтропия.

Нормализатор группы 3.4 имеет базис X_1, X_4, X_7, X_{11}. Однопараметрические группы операторов нормализатора действуют на решениях (1):

$$\begin{gathered} X_1 : \bar{x} = x + a;\ X_4 : \bar{U} = U + a_4;\ X_7 : \bar{\theta} = \theta + a_7; \\ X_{11} : \bar{t} = ta_{11},\ \bar{r} = ra_{11},\ \bar{x} = xa_{11}. \end{gathered} \tag{2}$$

Подстановка представления (1) в уравнения газовой динамики дает систему из 5 дифференциальных уравнений. У этой системы найдено 3 интеграла [1]:

$$\begin{gathered} S = S_0,\ \ sW^2 = D\rho(V - s), \\ U_1 = -\int_{s_0}^{s} \frac{\beta s + \alpha W}{s(V - s)} ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Остаются два неавтономных уравнения

$$\begin{gathered} V' + (V - s)\rho^{-1}\rho' = -Vs^{-1}, \\ (V - s)V' + a^2\rho^{-1}\rho' = Ds^{-2}\rho(V - s), \end{gathered} \tag{4}$$

где $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука.

Особое решение $f_\rho = (V - s)^2$ рассмотрено в [1] и возможно лишь для уравнения состояния $p = p_0 - 4^{-1}D\rho^2$. Особое решение описывает истечение в вакуум из мгновенного линейного источника по логарифмическим спиралям на параболоиде.

Если $f_\rho \neq (V - s)^2$, то система (4) разрешается относительно производных. Рассмотрим подмодель без закрутки $D = W = 0$. Первое уравнение системы (4) инвариантно относительно растяжения $s \to \alpha s$, $V \to \alpha V$, $\rho \to \beta\rho$, где α, β параметры растяжения. Второе уравнение системы (4) без закрутки принимает вид

$$(V - s)V' + \alpha^{-2}a^2(\beta\rho)\rho^{-1}\rho' = 0.$$

Это уравнение инвариантно, если выполнено функциональное уравнение $a(\beta\rho) = \alpha a(\rho)$. Решение функционального уравнения таково: $a = a_0\rho^k$, $\alpha = \beta^k$. Полученное решение можно положить в основу асимптотического решения подмодели (4) без закрутки с общим уравнением состояния:

$$a^2 = \rho^{2k}(a_0^2 + a_1\rho + \ldots), \quad \alpha = \beta^k,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\beta + \ldots, V = V_0 + V_1\beta + \ldots$$

[1]Работа поддержана грантом правительства РФ № 11.G34.31.0042.

В нулевом приближении по степеням β получим асимптотическую подмодель (индекс «0» опускаем):

$$V'+(V-s)\rho^{-1}\rho' = -Vs^{-1},\ (V-s)V'+a_0^2\rho^{2k-1}\rho' = 0.$$

Старшие приближения задаются линейными уравнениями. Все приближения допускают оператор $s\partial_s + V\partial_V + \dfrac{1}{k}\rho\partial_\rho$. В инвариантах растяжения $v = Vs^{-1}$, $\sigma = a_0\rho^k s^{-1}$ получим автономную систему :

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sigma}{v}\frac{\sigma^2-(v-1)\left(v\left(k+1\right)-1\right)}{2\sigma^2-(v-1)^2}, \qquad (5)$$

$$\frac{ds}{s} = F(v)\frac{dv}{v},\quad \frac{(v-1)^2-\sigma^2}{2\sigma^2-(v-1)^2} = F(v). \qquad (6)$$

Уравнение (5) имеет две интегральные прямые $\sigma = 0$, $v = 0$ в плоскости (v, σ). Достаточно рассмотреть случай $\sigma \geq 0$, $s \geq 0$, так как допускается отражение $s \to -s$ $(t \to -t)$, $\sigma \to -\sigma$. В конечной части полуплоскости $\sigma \geq 0$ уравнение (5) имеет 4 особые точки.

Точка $O(0,0)$ — вырожденный узел, точка $(0,1)$ — узел, точка $(1,0)$ — вырожденная особая точка типа седло–узел, точка $S(v_s,\sigma_s)$, $v_s = (2k+1)^{-1}$, $\sigma_s = \sqrt{2}v_s k$ — седло. Картина интегральных кривых построена в работе [2], в которой рассмотрены движения газа для решений подмодели (5), (6), соответствующих особым точкам.

Рассмотрим интегральную кривую из седла S в узел O. Сепаратриса седла имеет асимптотическое поведение:

$$\sigma = \sigma_s + k_1 v_1 + k_2 v_1^2 + \dots,\ v_1 = v - v_s,$$

где k_1 — положительный корень уравнения $4k_1^2 - 2\sqrt{2}(k-1)k_1 - k(2k+3) = 0$, а k_2 задается равенством

$$4kk_2\left(3\sqrt{2}k_1+2-k\right) = \\ = (2k+1)\left[k_1k\left(\frac{5}{2}-3k\right)-\sqrt{2}k\left(2k^2+\frac{7}{2}k+\frac{1}{4}\right)\right].$$

Асимптотика интегральных кривых уравнения (5) в узле O такова

$$\sigma = Cv\left(1-kv+\frac{1}{2}\left(C^2+k(k-1)\right)v^2+\dots\right),$$

где C — произвольная постоянная. Численно можно определить значение постоянной $C = C_s(k)$, с которой сепаратриса седла входит в узел.

Пусть $\sigma = \sigma_s(v)$ сепаратриса седла, входящая в узел. Это монотонно возрастающая, выпуклая вверх кривая, определенная в интервале $[0, v_s]$.

Уравнение (6) определяет решение подмодели

$$s = s_0\exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v}\ \text{или}\ s = s_1\exp\int_{v_s}^v F(v)\frac{dv}{v}, \quad (7)$$

где $s_1 = s_0\exp\int_0^{v_s}F(v)\dfrac{dv}{v}$ и в выражении (6) для $F(v)$ вместо σ подставлено $\sigma = \sigma_s$.

Решение (1) принимает вид

$$U = \alpha\theta + \beta\ln|t| - \beta\int_{s_0}^s\frac{ds}{s(v-1)}, \\ V = sv(s),\quad W = 0,\quad s = rt^{-1}, \qquad (8)$$

где $v(s)$ определяется равенством (7).

Мировые линии частиц задаются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = U,\quad \frac{dr}{dt} = V,\quad r\frac{d\theta}{dt} = W, \\ x(t_0) = x_0,\quad r(t_0) = r_0,\quad \theta(t_0) = \theta_0.$$

Для решения (8) мировые линии через параметр v задаются формулами ($r_0 = t_0 s_0$)

$$\theta = \theta_0,\quad x = x_0 + (\alpha\theta_0 + \beta\ln|t_0|)(t-t_0), \\ r = r_0\exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v-1}, \\ t = t_0\exp\int_0^v F(v)\frac{dv}{v(v-1)}. \qquad (9)$$

Любую мировую линию, заданную лагранжевыми координатами (x_0, r_0, θ_0), можно привести к стандартной, используя преобразования (2). Стандартная кривая задана формулами (9) с $x_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$, при этом $t_0 = s_0^{-1}$ — параметр, связанный с решением (8). В полуплоскости $\theta = \theta_0$ стандартная кривая сдвигается по оси x. Через 2π сдвиг составляет $2\pi\alpha$. Значит непрерывного во всем пространстве решения нет. Но можно рассмотреть другое решение (8) с новой постоянной s_0 так, чтобы гладким образом склеить решения на разрыве. Таких решений можно взять бесконечно много, чтобы получить гладкое решение во всем пространстве. При этом возникает спиралевидная поверхность–стенка, двигающаяся с частицами, находящимися с одной стороны (относительная скорость нулевая). Относительная скорость частиц с другой стороны стенки ненулевая. Относительная скорость с каждым витком спиралевидной стенки возрастает так, что при стремлении к оси x скорость стремится к бесконечности.

В результате частицы без вращения вокруг оси x двигаются между спиралевидной стенкой к оси x, увеличивая скорость вдоль оси x до бесконечности за счет импульса двигающейся стенки.

Список литературы

[1] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

[2] Гумеров И.Ф. Плоскопараллельная галилеево осесимметричная галилеево автомодельная подмодель газовой динамики без закрутки // Тезисы 41-й Всероссийской молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург. 2010. С. 244–247.