МНОГОФАЗНЫЕ
СИСТЕМЫ 2012

УДК 519.6

Моделирование процесса копирования формы выступа на электроде–инструменте при электрохимической обработке

Муксимова Р.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Задачи моделирования нестационарного электрохимического формообразования сводятся к решению двух краевых задач для определения аналитических функций комплексного переменного: конформного отображения параметрической плоскости на физическую и частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства. Каждая из функций ищется в виде суммы известной функции с особенностями и двух неизвестных функций, определяемых с помощью формул Шварца или Келдыша–Седова. Одна из неизвестных функций предназначена для описания формы электрода–инструмента, вторая — обрабатываемой поверхности. Представлены результаты численного решения задач с электродом в виде круга и пластины.

1. Введение

Применение численно-аналитических методов для моделирования нестационарной электрохимической обработки (ЭХО) до настоящего времени ограничивалось решениями задач с точечным, полубесконечным пластинчатым [1, 2], криволинейным гладким [3] и плоским со щелью [4,5] электрод-инструментом (ЭИ). Для моделирования процесса прорезания пазов ЭИ в форме круга или другой ограниченной формы необходимо существенное видоизменение методов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную задачу электрохимического формообразования с помощью ЭИ, представляющего собой круг радиуса R (рис. 1). ЭИ заглубляется в заготовку со скоростью V_{et} под прямым углом к поверхности. Начальный зазор CD равен S_0.

Поверхности электродов считаются эквипотенциальными: на катоде потенциал $\Phi = -U$ (где U — напряжение), на аноде $\Phi = 0$, поэтому форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала W представляет собой прямоугольник (рис. 2).

Скорость электрохимического растворения $V_{ecm} = \dfrac{dY_C}{dt}$ локально определяется законом Фарадея

$$V_{ecm} = \eta\, kE_n, \tag{1}$$

где t — время; η — анодный выход по току; k — электрохимическая постоянная; E_n — нормальная к анодной поверхности составляющая напряженности электрического поля.

Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w, где $l = k\eta U/V_{et}$ (величина стационарного зазора в задаче об обработке плоским горизонтальным ЭИ):

$$\begin{gathered} z = Z/l, \quad x = X/l, \quad y = Y/l, \\ \tau = \frac{V_{et}}{l} t = k\eta_0 Ut/l^2, \quad w = \frac{W}{U}. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда

$$v_{et} = -\frac{dy_C}{d\tau} = -\frac{1}{l}\frac{l}{V_{et}}\frac{dY_C}{dt} = \frac{V_{et}}{V_{et}} = 1. \tag{3}$$

3. Краевые условия

В [1–6] закон Фарадея (1) с учетом (2) преобразован к виду

$$\Im\left(\overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}\frac{\partial z}{\partial \tau}\right) = -\Im\frac{\partial w}{\partial \sigma}, \tag{4}$$

где $z(\chi,\tau)$, $\dfrac{\partial z}{\partial \tau}(\chi,\tau,\, w(\chi,\tau)$ — аналитические функции некоторого комплексного параметра $\chi = \sigma + i\nu$.

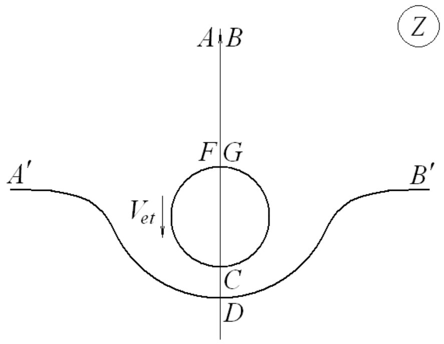

Рис. 1. Схема межэлектродного пространства (МЭП)

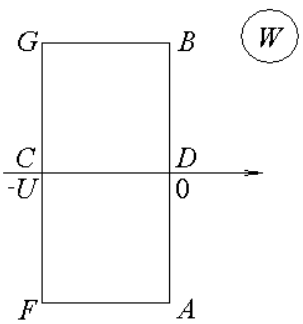

Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

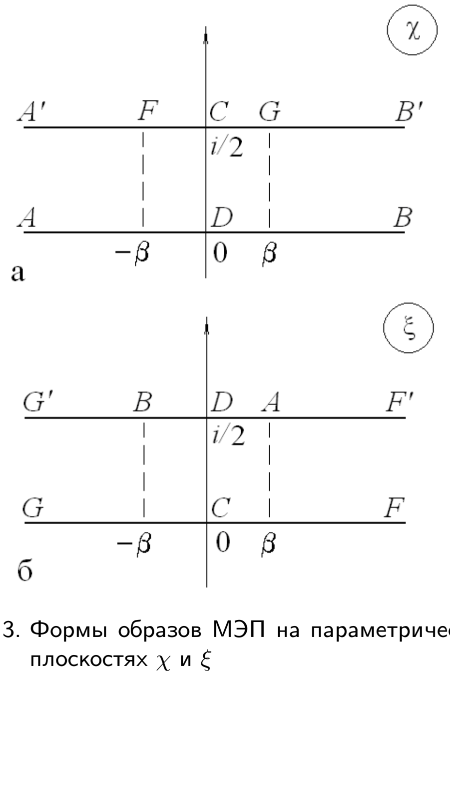

Рис. 3. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ

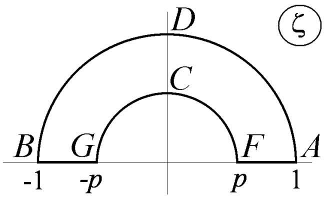

Рис. 4. Форма образа МЭП на параметрической плоскости ζ

4. Численный метод

Выберем в качестве параметрической переменную χ, область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 3(а)). Конформное отображение параметрической плоскости χ на плоскость комплексного потенциала удобнее определять через переменную ζ (рис. 4):

$$\begin{gathered}\chi = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1} - i\frac{\pi}{2}\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\frac{p^{2m-1}\left(\zeta^{2m-1}+\zeta^{-2m+1}\right)}{p^{2m-1}-p^{-2m+1}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Комплексный потенциал и его производная равны

$$\begin{gathered}W = -\frac{U}{\ln p}\left(\ln\zeta - i\frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\partial W}{\partial\chi} = -\frac{U}{\ln p}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)^{-1}.\end{gathered} \tag{6}$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z\left(\chi,\tau\right) = g\left(\tau\right) sh\pi\chi + z_a\left(\chi,\tau\right) + z_c\left(\xi\left(\chi\right),\tau\right), \tag{7}$$

где первое слагаемое при $g > 0$ конформно отображает полосу плоскости χ на верхнюю полуплоскость с разрезом, проведенным вверх от точки $0+ig$ до бесконечности; $z_a(\chi,\tau)$ — аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании $\bar{D}_\chi$ функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при $\chi = \sigma + i$ $\Im z_a(\chi,\tau) = 0$); $z_c(\xi,\tau)$ — аналитическая в полосе D_ξ (рис. 3(б)) и непрерывная в ее замыкании $\bar{D}_\xi$ функция, предназначенная для описания формы ЭИ (при $\xi = \omega + i/2$ $\Im z_c(\xi,\tau) = 0$) (рис. 3(б)). Связь ξ и χ:

$$\begin{gathered}\chi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{e^{2\pi\xi}+e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\xi}e^{2\pi\beta}+1} + \frac{i}{2}, \\ \xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{e^{2\pi\chi}+e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\chi}e^{2\pi\beta}+1} + \frac{i}{2}.\end{gathered} \tag{8}$$

Из (8) найдем ординату точки C электрод–инструмента:

$$\Im z\left(\frac{i}{2},\tau\right)=g\left(\tau\right)+\Im z_c\left(0,\tau\right)=s_0-\tau,\qquad \frac{dg}{d\tau}=-1-\Im\frac{\partial}{\partial\tau}z_c\left(0,\tau\right) \tag{9}$$

Допустим, ордината точки G электрод–инструмента равна H. Тогда

$$\frac{H}{l}=\frac{H_0}{l}-\tau=g\left(\tau\right)ch\left(\pi\beta\left(\tau\right)\right)+ +\frac{1}{i}\left\{z_a\left(\beta\left(\tau\right)+\frac{i}{2},\tau\right)+z_c\left(\infty,\tau\right)\right\}, \tag{10}$$

где $\beta(\tau)$ — образ точки G, определяемый из этого уравнения.

Функция $z_a\left(\chi,\tau\right)$ определяется следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi=\sigma+i0$ в узловых точках σ_m $(m=0,\ldots,n)$. Заданными на каждом временном шаге будут значения $\Im z_a\left(\sigma_m,\tau_j\right)=y_m$. Примем $\Im z_a\left(\sigma_n,\tau\right)=0$, поскольку $z_a\left(\sigma,\tau\right)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma\to\infty$. Значения $\Im z_a\left(\sigma,\tau\right)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Поскольку $z_a\left(\chi,\tau\right)$ — аналитическая функция, имеющая чисто мнимые значения на прямой $\Im\chi=1/2$, аналитически продолжим ее вверх на полосу единичной ширины. В силу принципа симметрии $\Im z_a\left(\sigma+i,\tau\right)=\Im z_a\left(\sigma+i0,\tau\right)$. Для восстановления функции $z_a\left(\chi,\tau\right)$ используем формулу Шварца

$$z_a\left(\chi,\tau\right)=\int\limits_0^\infty\Im z_a\left(\sigma,\tau\right)\frac{sh\pi\chi d\sigma}{ch\pi\sigma-ch\pi\chi}+ +\int\limits_0^\infty\Im z_a\left(\sigma,\tau\right)\frac{sh\pi\chi d\sigma}{ch\pi\sigma+ch\pi\chi}. \tag{11}$$

Производная $\Im\dfrac{\partial z_a}{\partial\sigma}\left(\sigma,\tau\right)=-\Im\dfrac{\partial z_a}{\partial\sigma}\left(-\sigma,\tau\right)$, тогда

$$\frac{\partial z_a}{\partial\chi}=\int\limits_0^\infty\Im\frac{\partial z_a}{\partial\sigma}\left(\sigma,\tau\right)\frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma-ch\pi\chi}d\sigma- -\int\limits_0^\infty\Im\frac{\partial z_a}{\partial\sigma}\left(\sigma,\tau\right)\frac{sh\pi\sigma}{ch\pi\sigma+ch\pi\chi}d\sigma. \tag{12}$$

Функция $z(\xi,\tau)$ получается аналогичным образом. Будем искать решение на границе $\xi=\omega$ в узловых точках $\omega_m(m=0,\ldots,n)$. Искомыми будут значения $\Re z_c\left(\omega_m,\tau_j\right)=\bar{x}_m$. Примем $\Re z_c\left(\omega_n,\tau\right)=0$. Значения $\Re z_c\left(\omega,\tau\right)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $P_c(\sigma)$, имеющего две непрерывные производные.

Отметим, что $z_c\left(\xi,\tau\right)$ — аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на отрезке $\Im\xi=1/2$, -$\beta\leq\Re\xi\leq\beta$ (анод BDA) и чисто мнимые значения на лучах $\Im\xi=1/2$, $\Re\xi\leq-\beta$ и $\Im\xi=1/2$, $\Re\xi\geq\beta$ (разрез $G\prime B$, $AF\prime$).

Для восстановления функции $z_c\left(\xi,\tau\right)$ используем формулу Келдыша–Седова:

$$\frac{z_c\left(\xi,\tau\right)}{G\left(\xi\right)}=\int\limits_0^\infty\Im\left[\frac{z\left(\omega,\tau\right)}{G\left(\omega\right)}\right]\frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega-ch\pi\xi}+ +\int\limits_0^\infty\Im\left[\frac{z\left(\omega,\tau\right)}{G\left(\omega\right)}\right]\frac{sh\pi\omega}{ch\pi\omega+ch\pi\xi}d\omega-g_1\left(\tau\right), \tag{13}$$

$$G\left(\xi\right)=sh\left(\pi\chi\right)=\frac{i}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),u=\sqrt{\frac{e^{2\pi\xi}+e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\xi}e^{2\pi\beta}+1}},$$

$$g_1\left(\tau\right)=2\int\limits_0^\infty\Im\left[\frac{z\left(\omega,\tau\right)}{G\left(\omega\right)}\right]\frac{sh\pi\omega ch\pi\omega}{ch^2\pi\omega+sh^2\pi\beta}d\omega.$$

Отметим, что слагаемое $g_1\left(\tau\right)G\left(\xi\right)$, аналогичное слагаемому в (7), введено так, чтобы функция $z_c\left(\xi,\tau\right)$ не имела особенности в точках A и B.

Производная $\dfrac{\partial z_c}{\partial\omega}\left(\omega,\tau\right)$ вычисляется следующим образом: с помощью дифференцирования построенного сплайна $P_c(\omega)$ вычисляются значения производных $\dfrac{\partial x_c}{\partial\omega}\left(\omega,\tau\right)$. По полученным с помощью (13) значениям $y_c\left(\omega,\tau\right)$ строится сплайн $P_{yc}(\omega)$, дифференцированием которого получаются производные $\dfrac{\partial y_c}{\partial\omega}\left(\omega,\tau\right)$.

5. Алгоритм численного решения

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решается численным методом. При этом на каждом временном шаге $\tau_j=j\Delta_\tau$, $j=1,2,...,k$ решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z. При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при $\tau=0$. Значения переменных $y_m\left(\tau_{j+1}\right)$ и $\bar{x}_m\left(\tau_{j+1}\right)$ на следующем шаге по времени вычисляются с помощью частных производных $\dfrac{\partial y_a}{\partial\tau}\left(\sigma_m,\tau_j\right)$, $\dfrac{\partial x_c}{\partial\tau}\left(\omega_m,\tau_j\right)$. Частные производные по времени определяются при решении краевой задачи: найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial\tau}\left(\chi,\tau_j\right)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ, удовлетворяющую краевому условию (4).

Для вычисления производной $\dfrac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_a(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\Im \dfrac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Значения $\Im \dfrac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $Q(\sigma,\tau)$. Для восстановления $\dfrac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (11), где вместо $\Im z_a(\sigma, \tau)$ используется $Q(\sigma,\tau)$.

Для вычисления производной $\dfrac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$ (χ фиксировано) также применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_c(\xi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\Re \dfrac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega_m, \tau_j) = r_m$. Значения $\Re \dfrac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $R(\omega,\tau)$. Для восстановления $\dfrac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$ используем формулу Келдыша-Седова, аналогичную (13) (с учетом того, что $\dfrac{\partial}{\partial \tau} G(\xi) = \dfrac{\partial}{\partial \tau} sh(\pi\chi) = 0$):

$$\frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau)}{G(\xi)} = -\frac{dg_1}{d\tau}(\tau) + \int_0^\infty \Im\left[\frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)}\right] \frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega - ch\pi\xi} + \int_0^\infty \Im\left[\frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)}\right] \frac{sh\pi\omega d\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi} \tag{14}$$

где $\dfrac{dg_1}{d\tau}(\tau) = 2\displaystyle\int_0^\infty \Im\left[\frac{\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau)}{G(\omega)}\right] \frac{sh\pi\omega ch\pi\omega}{ch^2\pi\omega + sh^2\pi\beta} d\omega$.

С учетом (8)–(14) определяются производные $\dfrac{\partial z}{\partial \tau}$.

Значения q_m, r_m, определяются методом коллокаций по краевому условию (4):

$$\Im\left[\frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma_m)\overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}(\sigma_m)\right] + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}(\sigma_m) = 0, \quad m = 0, ..., N-1. \tag{15}$$

На катоде краевое условие с учетом (21), (22) имеет вид

$$\Im\left[\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}(\omega_m) + i\right)\overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}(\omega_m)\right] = 0, \quad m = 0, ..., N-1. \tag{16}$$

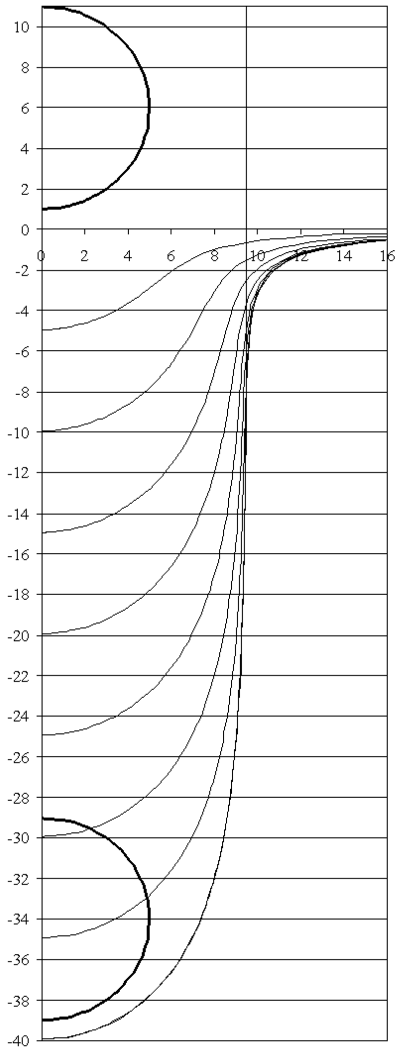

Рис. 5. Формы нестационарных поверхностей при обработке круглым ЭИ для s_0=1, $\Delta\tau = 5$, $r = 5$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (15), (16) и определения частных производных $\Im \dfrac{\partial z_a}{\partial \tau} = q_m$, $\Re \dfrac{\partial z_c}{\partial \tau} = r_m$, производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее снова повторяется процесс вычисления $\dfrac{\partial z_a}{\partial \chi}$, $\dfrac{\partial z_c}{\partial \xi}$, q_m, r_m и т.д.

6. Численные результаты

Численные результаты представлены на рис. 5–7. На рис. 5 показаны формы поверхности при обработке круглым ЭИ с радиусом $r = R/l = 5$ при $\eta = \text{const}$ ($\Delta\tau$ — шаг по вре-

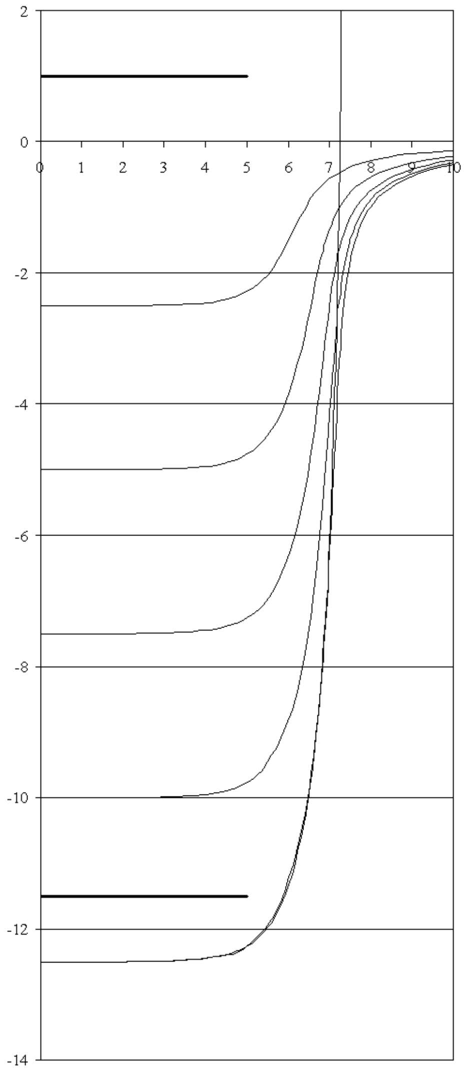

Рис. 6. Формы нестационарных поверхностей при обработке горизонтальным пластинчатым ЭИ для $l = L/R = 5$, $s_0 = 1$, $\Delta\tau = 2.5$

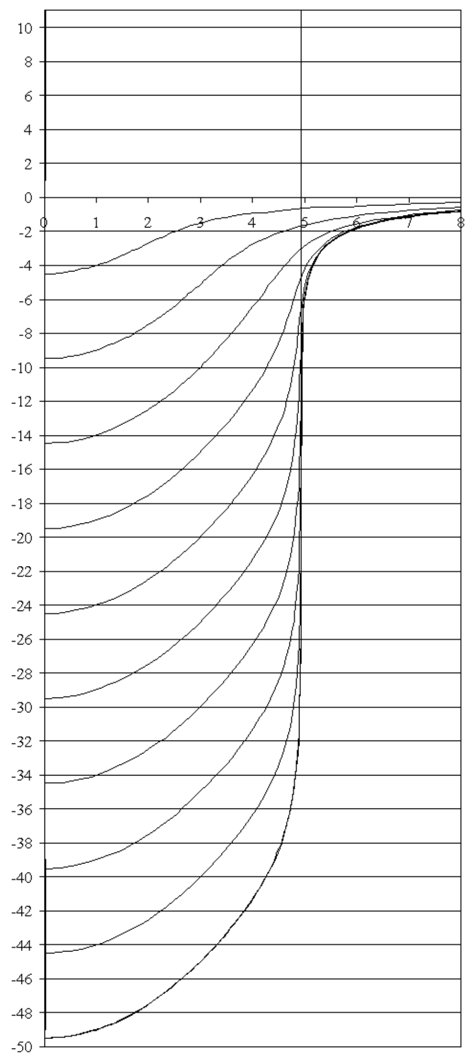

Рис. 7. Формы нестационарных поверхностей при обработке вертикальным пластинчатым ЭИ для $L = 10$, $s_0 = 1$, $\Delta\tau = 5$

мени). Картина в системе координат, связанной с неподвижной асимптотической поверхностью анода, показывает ход процесса растворения и позволяет увидеть установление стационарной формы обрабатываемой поверхности (которая была рассчитана заранее [5]). При уменьшении r в пределе получается задача обработки точечным ЭИ [5].

При рассмотрении форм ЭИ, отличных от круглой, имеет смысл рассмотреть граничные формы, которыми являются пластинчатые ЭИ.

Результаты численного решения при обработке горизонтальным пластинчатым ЭИ длины $2L$ для $\eta = \mathrm{const}$ приведены на рис. 6.

При $L \to \infty$ приходим к задаче обработки полубесконечным ЭИ. Стационарное решение для этой задачи имеет вид

$$x = \frac{1}{\pi}\left(2\ln(y+1) + 2\ln\frac{\pi}{2} + 2\right).$$

Формы нестационарной поверхности при обработке вертикальным пластинчатым ЭИ длины L приведены на рис. 7 для $\eta = \mathrm{const}$. При $L \to 0$ формы приближаются к соответствующим формам для точечного ЭИ.

7. Заключение

В данной работе решены нестационарные задачи прорезания пазов круглым и пластинчатым (горизонтальным и вертикальным) ЭИ. Для сравнения рассматривались предельные (по форме ЭИ) случаи формообразования точечным и плоским неограниченным вертикальным и горизонтальным ЭИ.

Во всех рассмотренных примерах наблюдалось установление стационарных процессов.

Список литературы

[1] Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Zinatullina O.R. Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining // Journal of Materials Processing Tech. 2004. Vol. 149/1–3. Elsevier. Pp. 398–403.

[2] Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Sherykhalina N.M., Urakov A.R. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // Journ. Eng. Math. 2006. Vol. 55, Nos. 1–4. Special Issue. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. Pp. 255–276.

[3] Житников В.П., Федорова Г.И. Квазианалитический метод решения плоских задач нестационарного электрохимического формообразования // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 7, № 1(14). С. 110–117.

[4] Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Оценка параметров формы выступа при нестационарной электрохимической обработке // Тезисы докладов Российской конф. «Многофазные системы: природа, человек, общество, технологии». Уфа: Нефтегазовое дело, 2010. С. 186–187.

[5] Поречный С.С., Муксимова Р.Р., Маннапов А.Р. Моделирование процесса формообразования выступов при электрохимической обработке // Вестник УГАТУ. 2010. Т. 14, № 2(37). С. 195–201.

[6] Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.