

Движение поршня в цилиндрической трубе с учетом вязкого трения¹

Насибуллаев И.Ш.*, Насибуллаева Э.Ш.**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе рассматривается численное моделирование движения поршня с пружиной в цилиндрической трубе под действием осциллирующего перепада давления с учетом действия сухого и вязкого трений. Определяется время установления периодического режима движения поршня и характер его движения в зависимости от различных типов трения и жесткости пружины.

1. Введение

При разработке различных технических устройств важным является определение влияния различных видов сил трения на динамику составных частей устройства. Трение между твердыми элементами определяется коэффициентом сухого трения — коэффициент пропорциональности между силой трения и силой нормальной реакции на границе элементов (закон Амонтона–Кулона). При наличии жидкой фазы необходимо учитывать вязкое трение через коэффициент динамической вязкости, связывающий силу вязкого трения и произведение площади контакта и нормального градиента скорости вблизи поверхности.

Ранее было проведено численное исследование влияния сухого и вязкого трений на движение поршня в трубе цилиндрической формы [1]. Было получено, что влияние жидкости в зазоре на поршень может приводить как к ускорению, так и к замедлению движения поршня в зависимости от мгновенного значения скорости движения поршня и значения нормального градиента скорости жидкости вблизи поверхности поршня. При этом, влияние вязкого трения оказалось малым (порядка 2%). Наличие сухого трения оказывает существенное влияние на скорость движения поршня и смещает положение равновесия и сдвиг по фазе относительно фазы градиента давления.

В данной работе продолжено исследование влияние различных видов сил трения на движение поршня в цилиндрической трубе с учетом дополнительного действия жесткости пружины, а так-

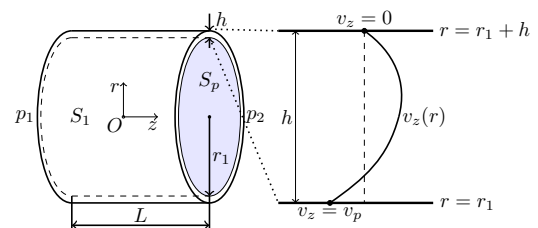


Рис. 1. Геометрия задачи в цилиндрических координатах

же определяются условия, когда кривизной трубы можно пренебречь, и свести гидродинамическую задачу к плоскому параллельному течению жидкости с комбинированным пуазейлевским и сдвиговым (с одной фиксированной и одной инертной границей) воздействиями.

2. Математическая модель

Получим систему уравнений для скорости течения жидкости и скорости движения поршня в цилиндрической и декартовой системе координат.

2.1. Цилиндрические координаты

Рассмотрим движение поршня радиуса r_1 и массой m внутри цилиндра радиуса $r_2 = r_1 + h$ (h — зазор между поршнем и цилиндром), заполненного жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ , под действием периодического по времени перепада давления $\Delta p g(t)$, $g(t) = \cos(\omega t)$ (рис. 1), где $\Delta p = (p_1 - p_2)$, p_1 и p_2 — значения давлений слева и справа от поршня, соответственно; $\omega = 2\pi f$, f — частота осцилляций давления.

Начало цилиндрической системы координат

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-01-97009, 11-01-97007, 11-08-00823).

поместим на оси в центре цилиндра. Координаты в радиальном, окружном и осевом направлениях обозначим через r , φ и z соответственно, а компоненты скорости течения жидкости — v_r , v_φ и v_z . Скорость движения поршня имеет только одну компоненту v_p — вдоль оси z .

Уравнение движения поршня описывается вторым законом Ньютона:

$$mv_{p,t}(t) = S_p \Delta p f(t) - k_p z_p(t) - F(v_p) - \mu S_1 v_{z,r}(r, t)|_{r=r_1}, \quad (1)$$

где введено обозначение для частной производной $f_{,x} = \partial f / \partial x$; S_p — площадь поперечного сечения поршня; $S_1 = 2\pi r_1 L$ — площадь внешней поверхности поршня; L — длина поршня; k_p — жесткость пружины; z_p — отклонение пружины от равновесного состояния. Сила сухого трения $F(v_p) = F_0 \operatorname{sgn}(v_p)$, где F_0 — модуль силы трения. Последнее слагаемое уравнения (1) описывает силу вязкого трения:

$$F_v = \tau S_1 = \mu S_1 \left. \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_1},$$

где τ — напряжение поршня на поверхности.

Координата поршня z_p описывается уравнением

$$\frac{dz_p(t)}{dt} = v_p(t). \quad (2)$$

В начальный момент времени поршень покоится: $v_p(0) = 0$.

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости и уравнением Навье–Стокса [2]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho[\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad (3)$$

где ∇ — оператор набла; Δ — оператор Лапласа; ∇p — градиент давления.

Пренебрегая краевыми эффектами, получим $v_z = v_z(r, t)$. Поскольку течение является осесимметричным и не рассматривается осевое вращение поршня, компонента скорости $v_\varphi = 0$. Из уравнения неразрывности получим, что $v_r = 0$. Таким образом, рассматриваемое течение жидкости соответствует нестационарному параллельному течению. Уравнение Навье–Стокса (3) запишется в виде:

$$\rho v_{z,t} = -p_{,z} + \mu \left(v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r} \right), \quad (4)$$

где градиент давления $p_{,z} = (\Delta p / L)g(t)$.

Граничные условия на поверхности поршня ($r = r_1$) и цилиндра ($r = r_2 = r_1 + h$) определяются из условия залипания:

$$v_z(t, r_1) = v_p(t), \quad v_z(t, r_2) = 0. \quad (5)$$

Для исследования системы проведем обезразмеривание уравнений. В качестве характерного размера выберем ширину зазора h , а для безразмерного времени выберем обратную частоту потока ω^{-1} . Размерные величины примут вид (безразмерные величины записаны с тильдами):

$$z = h\tilde{z}, \quad r = h\tilde{r}, \quad v = (h\omega)\tilde{v}, \quad t = \omega^{-1}\tilde{t}.$$

Опуская тильды, запишем безразмерную систему:

$$v_{z,t} = a_p g(t) + a_f (v_{z,rr} + r^{-1}v_{z,r}), \quad (6)$$

$$v_{p,t} = b_p g(t) - k_p z_p - k_f \operatorname{sgn}(v_p) - b_f v_{z,r}(r = r_1), \quad (7)$$

$$z_{p,t} = v_p, \quad (8)$$

где $a_p = \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\rho h \omega^2}$ — амплитуда давления для жидкости; $a_f = \frac{1}{\operatorname{Re}} = \frac{\mu}{\rho h^2 \omega}$; $\operatorname{Re} = \frac{\rho h^2 \omega}{\mu}$ — число Рейнольдса; $b_p = \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\rho_p h \omega^2} = a_p \rho / \rho_p$ — амплитуда давления для поршня; $b_k = \omega_0^2 / \omega^2$; ρ_p — плотность материала поршня; $b_f = \frac{2\mu}{\rho_p r_1 h \omega} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{2}{r_1} \frac{\rho}{\rho_p}$ — величина, характеризующая силу вязкого трения. Величины, характеризующие материальные параметры и геометрию системы, размерны.

2.2. Декартовы координаты

Уравнения движения поршня в цилиндрической трубе представляют собой плоскую двухмерную задачу. Проведем сравнение этих уравнений с плоским параллельным течением в декартовой системе координат (течение в плоском канале с подвижной границей) для того, чтобы определить параметры, при которых кривизной трубы можно пренебречь.

Начало декартовой системы координат помещено на поверхности поршня, ось Ox — вдоль движения поршня, Oz — перпендикулярно движению поршня (рис. 2). Течение индуцируется приложенным вдоль слоя перепадом давления $p(t) = \Delta p g(t)$.

Система уравнений, описывающая динамику жидкости и поршня в безразмерном виде (характерный размер — h , характерное время — ω^{-1}), примет вид:

$$v_{x,t} = a_p g(t) + a_f v_{x,rr}, \quad (9)$$

$$v_{p,t} = b_p g(t) - k_p x_p - k_f \operatorname{sgn}(v_p) - b_f v_{x,z}(z = 0), \quad (10)$$

$$x_{p,t} = v_p, \quad (11)$$

где коэффициенты a_i , b_i и k_i (где $i = \{p, f\}$) совпадают с соответствующими коэффициентами для цилиндрической системы координат с учетом обозначений $R = r_1$, $S_1 = S_\ell$ и $S_p = S_f$.

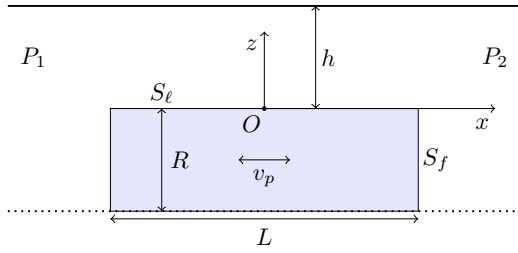


Рис. 2. Геометрия задачи в декартовых координатах

Уравнение движения поршня в цилиндрической и декартовой геометрии полностью совпадают, если выбрать $S_1 = S_\ell$ и $S_p = S_f$. Уравнение Навье–Стокса в цилиндрической геометрии содержит дополнительное слагаемое в правой части, учитывающее кривизну трубы:

$$a_f r^{-1} v_{z,r}. \quad (12)$$

Таким образом, задачу в цилиндрической системе координат можно свести к плоскому параллельному течению в декартовой системе координат, когда слагаемое (12) не вносит существенного вклада в уравнение Навье–Стокса, т.е. при $v_{z,rr} \gg r^{-1} v_{z,r}$ или при $a_f \ll a_p$. Для типичных параметров системы и большой амплитуды градиента давления ($\Delta p \sim 10^5$ Па) последнее условие выполняется в моменты времени, когда $|g(t)| \lesssim a_f/a_p \sim 10^{-8}$, т.е. во время пренебрежимо малой доли периода перепада давления.

2.3. Численная реализация

Уравнения (6) с граничными условиями (5) записывались с помощью метода конечных разностей и решались численно методом Ньютона. Уравнение Навье–Стокса записывалось в виде численной схемы Кранка–Николсона:

$$\begin{aligned} \frac{v_z^{j+1;i} - v_z^{j;i}}{\Delta t} &= a_p f(t^j) + \\ &+ \frac{a_f}{2\Delta h^2} (v_z^{j+1;i+1} - 2v_z^{j+1;i} + v_z^{j+1;i-1} + \\ &+ v_z^{j;i+1} - 2v_z^{j;i} + v_z^{j;i-1}) + \\ &+ \frac{a_f}{4\Delta h r^i} (v_z^{j+1;i+1} - v_z^{j+1;i-1} + v_z^{j;i+1} - v_z^{j;i-1}), \end{aligned}$$

где индекс i соответствует i -му узлу по координате и j соответствует j -му узлу по времени.

Уравнения движения поршня запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{z_p^{j+1} - z_p^j}{\Delta t} &= b_p f(t^j) - k_p z_p - b_f v_{z,r}|_{r=r_1} - k_f \operatorname{sgn}(v_p^j), \\ \frac{z_p^{j+1} - z_p^j}{\Delta t} &= v_p^j. \end{aligned}$$

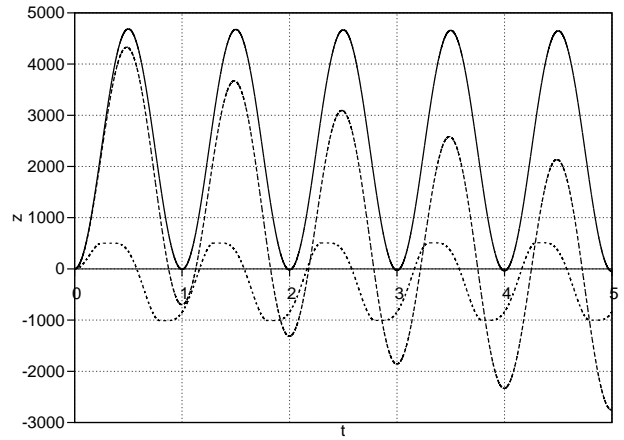


Рис. 3. Зависимость координаты поршня от времени без трения (—) и с сухим трением: $F_0 = 1$ Н (—), $F_0 = 20$ Н (- - -)

После записи дифференциальных уравнений через конечные разности, мы получаем систему алгебраических уравнений, которую, дополняя первым граничным условием (5) в виде $v_z^{j=0,i} = v_p^i$, мы связываем переменные v_z и v_p . Для получения установившегося периодического течения методом Ньютона, с использованием явной схемы по координатам, необходимо просчитать несколько полных периодов с очень малым шагом по времени (для обеспечения точности по координате и сходимости схемы). Для оптимизации численной схемы была выбрана неявная схема по координате и на каждом временном шаге решение находилось с помощью итерационного метода Ньютона–Рафсона. Погрешность вычислений не превышала 1% при разбиении сетки по координате на 50 узлов и $2 \cdot 10^5$ шагов по времени за 1 с.

3. Результаты моделирования

Расчеты проводились для следующих параметров: диаметр трубы $2r_1 = 10^{-2}$ м, ширина зазора $h = r_1/50$, длина поршня $L = 10^{-2}$ м. Параметры для материала поршня (алюминий) и жидкости (авиационный керосин ТС-1) были взяты при температуре $T = 20^\circ\text{C}$: плотность поршня $\rho = 2700$ кг/м³, плотность жидкости $\rho = 780$ кг/м³, вязкость жидкости $\mu = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с, упругость пружины $k = 1 \dots 5$ кН/м. Амплитуда перепада давления $\Delta P = 10^5$ Па.

На рис. 3 показана зависимость безразмерной координаты положения поршня (в единицах h) от безразмерного времени (в периодах колебания внешней силы) для параметров $k_f = k_p = 0$ и в отсутствие вязкого трения. Зависимость координаты

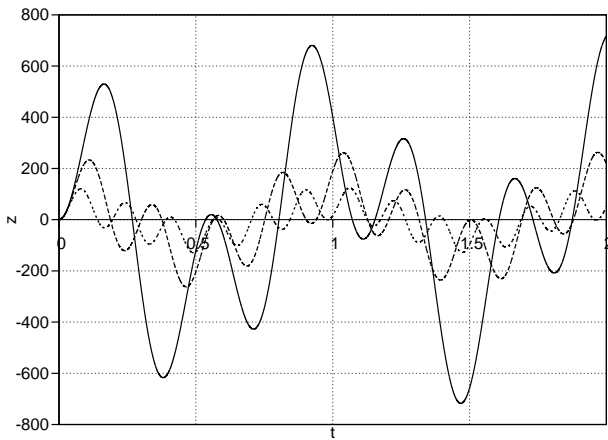


Рис. 4. Зависимость координаты поршня от времени с учетом жесткости пружины и для $F_0 = 0$ Н: $k_p = 1000$ Н/м (—), $k_p = 2500$ Н/м (---), $k_p = 5000$ Н/м (- - -)

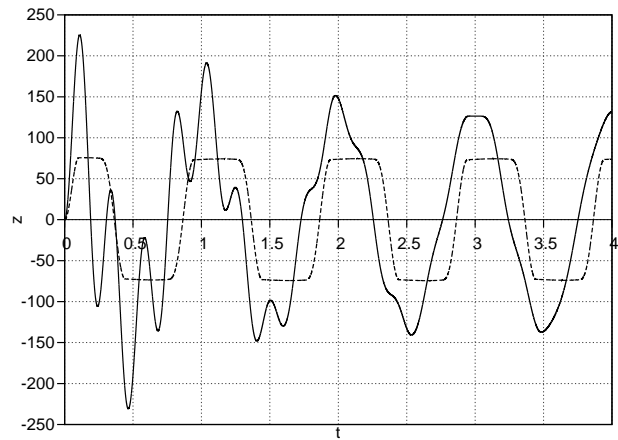


Рис. 5. Зависимость координаты поршня от времени с учетом жесткости пружины $k_p = 2500$ Н/м для различных сил трения: $F_0 = 1$ Н (—), $F_0 = 20$ Н (- - -)

от времени периодическая со сдвигом фазы относительно внешнего давления $g(t) \sim \cos t$ на π .

Наличие сухого трения F_0 приводит к тому, что смещается положение равновесия и амплитуда колебаний (рис. 3). С уменьшением значений силы сухого трения ($F_0 < 15$ Н) увеличивается количество периодов необходимых для выхода динамики поршня на периодический режим. При больших значениях силы трения ($F_0 > 15$ Н) выход на периодический режим происходит с первого периода. Отметим, что часть времени внешняя сила меньше силы трения покоя $a_p \cos t < F_s$ и поршень покоится (горизонтальные участки в зависимости $z(t)$). При силе сухого трения $F_0 > 30$ Н поршень покоится практически все время.

Учет жесткости пружины приводит к существенному изменению характера движения поршня (рис. 3), поскольку кроме периодического градиента давления в системе действует упругая сила пружины. Уравнение движения поршня

$$z_{p,tt} = -k_p z_p + b_p \cos t$$

имеет следующее установившееся решение:

$$z_p = C_1 \cos(\sqrt{b_k} t) + C_2 \sin(\sqrt{b_k} t) - \frac{b_p}{1 - b_k} \cos t,$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Из решения видно, что координата поршня z_p имеет две периодические составляющие — с частотой перепада давления ω и собственной частотой колебания системы поршень–пружина $\omega_0 = \omega \sqrt{b_k}$. Для типичных параметров системы $k = 2,5$ кН/м и $m = 8,5$ г собственная частота колебаний системы

$\omega_0 = \sqrt{k_p/m} \approx 1700$ рад/с ($f_0 \approx 270$ Гц). Для частот внешней силы $\omega = 2\pi \cdot 40$ Гц ≈ 250 Гц $\sim \omega_0$ возможны резонансные явления в системе. С ростом коэффициента упругости k_p растет и собственная частота колебаний $\omega_0 \sim \sqrt{k_p}$, а амплитуда колебаний уменьшается. Период колебаний при этом будет равен наименьшему общему кратному частот ω и ω_0 . Точка равновесия смещается к $z_p = 0$. При больших значениях коэффициента упругости пружины k_p система переходит к периодическому режиму за небольшое время.

При совместном действии сухого трения и жесткости пружины (рис. 5) режим движения поршня зависит от величины силы трения. С ростом величины силы трения F_0 амплитуда колебаний поршня и время установления периодического режима движения уменьшаются, причем частота колебаний устанавливается равной частоте перепада давления. Точка равновесия соответствует $z_p = 0$.

Уравнение движения поршня с учетом жесткости поршня и силы сухого трения имеет вид:

$$v_{p,t} = -k_p z_p + b_p \cos t - b_f \operatorname{sgn}(v_p).$$

Умножив уравнение на скорость поршня v_p и преобразовав, получим закон изменения механической системы «поршень–пружина»:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_p^2}{2} + k_p \frac{x_p}{2} \right) = b_p v_p \cos t - b_f |v_p|.$$

На рис. 6 показаны зависимости от времени вкладов в изменение энергии системы компонент с перепадом давления ($b_p v_p \cos t$) и силой трения ($b_f |v_p|$),

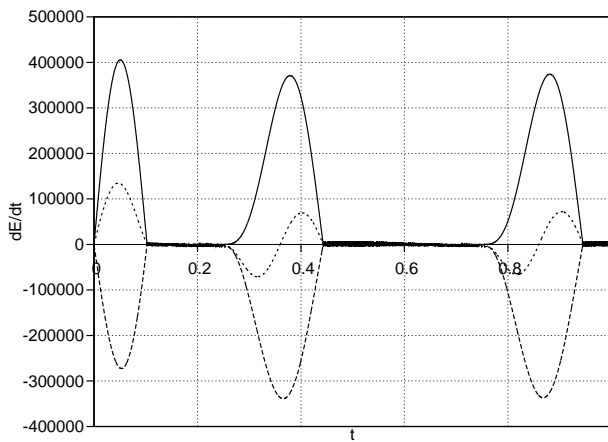


Рис. 6. Изменение энергии системы со временем для $F_0 = 20$ Н, $k_p = 2500$ Н/м: (—) мощность перепада давления, (---) мощность силы трения, (- - -) результирующая мощность

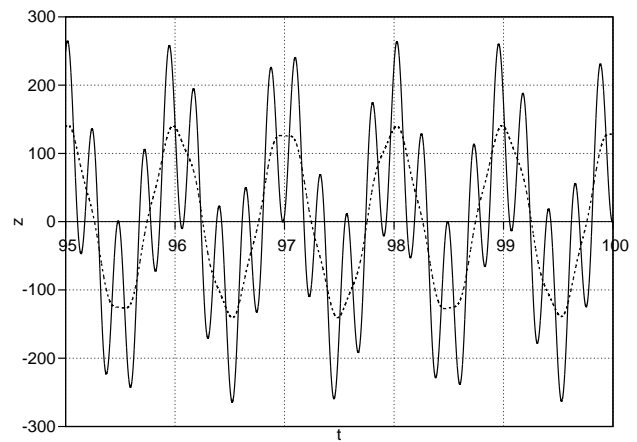


Рис. 7. Зависимость координаты поршня от времени без вязкого трения (—) и с вязким трением (---) для $k_p = 2500$ Н/м

а также результирующий вклад в систему. Видно, что периодический перепад давления вносит вклад в рост энергии системы (закачка энергии), а сила трения уменьшает энергию системы (диссипация энергии). При установившемся движении результирующий вклад энергии имеет периодический характер и равен нулю за период. Таким образом, механическая энергия системы сохраняется — вся входящая энергия переходит во внутреннюю.

При наличии вязкого трения с учетом жесткости пружина в первые периоды колебаний не оказывает существенного влияния, однако, через продолжительное время (нескольких десятков периодов) влияние становится существенным (рис. 7). Период колебаний совпадает с периодом изменения перепада давления и амплитуда колебаний уменьшается почти вдвое. Амплитуда градиента скорости $v_{z,r}$ на поверхности $r = r_1$ увеличивается при увеличении жесткости пружины, течение устанавливается за один период (рис. 8). Воздействие силы вязкого трения совпадает с воздействием малой силы сухого трения по периоду колебаний и уменьшению амплитуды колебаний при установившемся течении, но при воздействии сухого трения форма колебаний остается симметричной по периодам, а при вязком трении она немного меняется от периода к периоду.

4. Начальные условия

В численной реализации уравнения движения поршня в начальный момент времени $t = 0$ предполагалось, что поршень находится в точке $z_p(0) = 0$ и начальная скорость $z_{p,t}(0) = 0$ при максимальном

значении перепада давления $g(0) = 1$. Для получения установившегося режима течения необходимо просчитать большое количество периодов по времени, особенно для малых сил трения: вязкого трения и сухого трения с $F_f < 1$ Н. Необходимо учесть и то, что для ряда параметров смещение поршня от равновесного состояния может быть значительным и превышать величину характерного хода поршня ($z_{max} = 1$ м $\sim 100h$ или 100 в безразмерных величинах). В этом случае, при численной реализации необходимо выбрать начальные условия таким образом, чтобы координата поршня не выходила за диапазон $-z_{max}/2 \leq z_p \leq z_{max}/2$.

Рассмотрим различные начальные условия на поршень с учетом сдвига фазы перепада давления относительно начального момента времени. При периодическом перепаде давления $g(t) = \cos(t + \varphi_p)$ (размерная частота ω), где φ — фаза давления в начальный момент времени $t = 0$. Уравнение движения поршня для координаты положения поршня z_p (пренебрегая влиянием жидкости на движение поршня):

$$z_{p,tt} = b_p \cos(t + \varphi_p).$$

Т.е. поршень движется по закону

$$z_p = -b_p \cos(t + \varphi_p) + (\dot{z}_0 - b_p \sin \varphi_p)t + (z_0 + b_p \cos \varphi_p),$$

где z_0 — начальное положение поршня и $z_{0,t}$ — начальная скорость поршня. Для того чтобы поршень колебался относительно неподвижной точки x_r , необходимо выполнение условия:

$$z_{0,t} - b_p \sin \varphi_p = 0 \Rightarrow v_{0,t} = b_p \sin \varphi_p. \quad (13)$$

Точка x_r будет центральной для пути поршня по

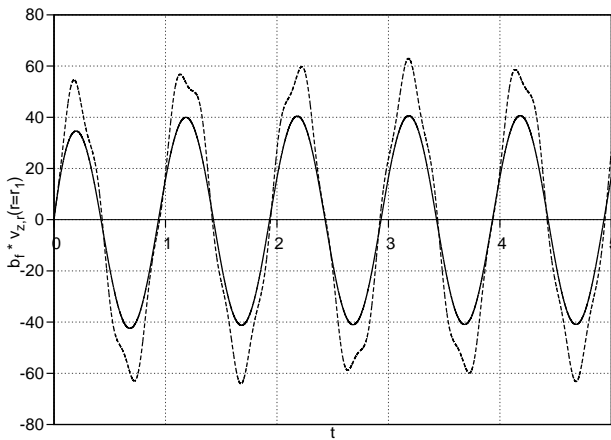


Рис. 8. Зависимость градиента скорости $v_{z,r}$ на поверхности $r = r_1$ от времени с жесткостью $k_p = 0$ Н/м (—) и $k_p = 2500$ Н/м (---)

периоду при выполнении условия:

$$z_0 + b_p \cos(t + \varphi_p) = 0 \Rightarrow z_0 = -b_p \cos(t + \varphi_p). \quad (14)$$

Рассмотрим два возможных значения начальной фазы φ_p и соответствующие начальные условия, удовлетворяющие условиям (13) и (14):

1. $\varphi_p = 0$, $g(t) = \cos t$: $z_p = -b_p \cos t + z_{0,t}t + (z_0 + b_p)$. Начальная скорость поршня равна нулю $z_{0,z} = 0$ и поршень находится в крайнем левом положении $z_0 = -b_p$. Данный случай подходит для моделирования движения поршня без ограничений на ход поршня. Учет течения жидкости приведет к изменению амплитуды колебаний поршня.
2. $\varphi_p = -\pi/2$, $g(t) = \sin t$: $z_p = -b_p \sin t + (z_{0,t} + b_p)t + z_0$. Начальная скорость поршня максимальна, поршень движется влево $z_{0,t} = -b_p$ и находится в центральной точке $z_0 = 0$. Данный случай подходит для моделирования движения поршня с ограничением и без ограничения на ход поршня. Учет течения жидкости приведет к изменению максимальной скорости поршня и при движении без ограничения хода поршня может привести к появлению линейной компоненты скорости движения поршня.

Отметим, что при моделировании движения поршня с пружиной, равновесная точка всегда находится в координате $z_p = 0$ за счет упругой силы, всегда направленной к этой точке.

5. Заключение

В работе было проведено исследование движения поршня в цилиндрической трубе с учетом вяз-

кого и сухого трений, а также жесткости пружины. Было получено, что в рассматриваемых диапазонах материальных параметров системы при учете жесткости пружины возможен резонанс. Совместное воздействие жесткости пружины и сухого трения приводит к тому, что точка равновесия определяется наличием жесткости пружины ($z_p = 0$), а период колебаний — наличием силы сухого трения (колебания происходят на частоте перепада давления, а не на собственной частоте). С ростом как жесткости пружины, так и силы сухого трения, амплитуда колебаний поршня уменьшается. Для малых сил трения (как сухого, так и вязкого) выход на периодический режим движения происходит за большое количество циклов. В системе с пружиной влияние вязкого трения значительно. При больших перепадах давления кривизной трубы можно пренебречь и свести задачу к нестационарному параллельному течению в плоском капилляре.

Список литературы

- [1] И.Ш. Насибуллаев, Э.Ш. Насибуллаева. Влияние различных видов силы трения на движение поршня в трубе. // Труды Института механики УНЦ РАН. Вып. 8. / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Нефтегазовое дело, 2011, С. 257–265.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т 6. М.: Наука, 1988. 736 с.