

# Отражение короткой изгибной бегущей волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу<sup>1</sup>

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследуется отражение от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу, и прохождение короткой изгибной бегущей волны. Получена зависимость решения от начальной координаты распределенной массы и ее величины. Решение обратной задачи позволяет определить начальную координату распределенной массы и ее величину по данным отраженной волны в точке наблюдения.

## 1. Введение

В протяженных объектах типа магистральных трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [1]. В статье [2] предлагается метод, позволяющий вычислить местоположение и объем двух полостей в стержне по собственным частотам изгибных колебаний. Рассматривается случай шарнирного закрепления концов стержня. Пустота моделируется отрицательной сосредоточенной массой. В работе [3] предложен метод отрицательной массы, на основе которого получены новые результаты определения местоположения и объема дефекта стержня в виде малой полости по собственным частотам изгибных колебаний. Применение метода не зависит от формы полости. Величина объема полости моделируется абсолютной величиной отрицательной сосредоточенной массы стержня. В связи с этим сочетание приборного диагностирования в доступном месте (точке наблюдения) и моделирования отраженных волн от удаленной точечной воздушной полости представляет определенный интерес.

## 2. Постановка задачи

Предполагается, что из удаленной точки трубопровода круглого поперечного сечения радиусом  $R$  слева направо распространяется короткая изгибная волна смещения, амплитуда и круговая частота которой в точке наблюдения  $O$  с координатой  $x = 0$

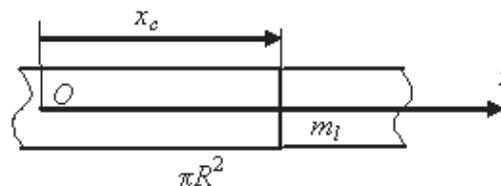


Рис. 1. Расчетная схема

равны  $W$  и  $\omega$ . Принято, что затухающая часть волны равна нулю. В трубопроводе с жидкостью в точке с координатой  $x_c$  прикрепляется распределенная масса  $m_l$  (рис. 1). Требуется определить отраженную и проходящую волны по известной распределенной массе и ее начальной координате, а также начальную координату распределенной массы и ее величину по отраженной волне в точке наблюдения.

Уравнения Тимошенко, учитывающие инерцию вращения и сдвиг, имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} - Q - \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \quad F = \pi(R^2 - R_i^2), \\ F_i &= \pi R_i^2, \quad J = \pi(R^4 - R_i^4)/4, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $M$  и  $Q$  — изгибающий момент и перерезывающая сила;  $\rho$ ,  $F$ ,  $R$ ,  $J$  — плотность, площадь, наружный радиус и момент инерции поперечного сечения трубопровода;  $\rho_i$ ,  $F_i$ ,  $R_i$  — плотность жидкости, площадь сечения «в свету» и внутренний радиус трубопровода;  $w$  — прогиб;  $\psi$  — угол поворота сечения при изгибе. Из закона Гука следуют выражения:

$$M = EJ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q = -GF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-97003\_р\_поволжье).

причем выше и здесь под  $G$  подразумевается значение модуля сдвига, умноженное на коэффициент  $k'$  распределения напряжения в поперечном сечении,  $E$  — модуль упругости.

Уравнения (1) с учетом соотношений (2) можно записать относительно функции прогиба:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{F\eta_k}{Jc_l^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1+\gamma_k}{c_l^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma_k}{c_l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= 0, \\ \gamma_k &= \frac{c_l^2}{c_s^2} \eta_k, \quad \eta_1 = 1 + \frac{\rho_i F_i}{\rho F}, \\ \eta_2 &= 1 + \frac{\rho_i F_i + m_l}{\rho F}. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_l = \sqrt{E/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  — скорости распространения волн растяжения-сжатия и волн сдвига. При этом выражения (2) приобретают вид:

$$\begin{aligned} M &= EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\ Q &= EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{EJ(\rho F + \rho_i F)}{GF} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая функцию  $w$  в виде  $\exp(i\omega t + \tilde{\alpha}_k x)$ , из (3) получаем характеристическое уравнение относительно  $\tilde{\alpha}_k$ , корни которого равны  $\pm i\alpha_k$ ,  $\pm\beta_k$ , причем

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \omega \left[ \frac{1+\gamma_k}{2c_l^2} + \left( \frac{(1-\gamma_k)^2}{4c_l^4} + \frac{F\eta_k}{J\omega^2 c_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{L}, \\ \beta_k &= \omega \left[ \left( \frac{(1-\gamma_k)^2}{4c_l^4} + \frac{F\eta_k}{J\omega^2 c_l^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\gamma_k}{2c_l^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) принимает вид для участков 1 и 2:

$$w_k = e^{i\omega t} (A_k e^{i\alpha_k x} + B_k e^{-i\alpha_k x} + C_k e^{\beta_k x} + D_k e^{-\beta_k x}), \quad k = 1, 2...$$

Ограниченное решение, удовлетворяющее условию отсутствия отраженных волн ( $A = C = 0$ ), записывается

$$w_k = B_k e^{+i(\omega t - \alpha_k x)} + D_k e^{i\omega t - \beta_k x}.$$

Условия стыкования решений при  $x = x_c$  (условия равенства перемещений, углов поворота  $\psi$ , изгибающих моментов  $M$ , перерезывающих сил  $Q$ ):

$$w_2 = w_1, \quad \psi_2 = \psi_1, \quad M_2 = M_1, \quad Q_2 = Q_1. \quad (5)$$

Условия (5) с учетом (2), (4) записываются в виде:

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial w_2^3}{\partial x^3} - \frac{(\rho F + \rho_i F + m_l)}{GF} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial t^2} &= \\ = \frac{\partial w_1^3}{\partial x^3} - \frac{(\rho F + \rho_i F)}{GF} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}, \quad x &= x_c, \end{aligned} \quad (6)$$

Поперечное перемещение в трубопроводе задается в виде незатухающей бегущей изгибной волны

$$w = W \sin(\omega t - \alpha_1 x). \quad (7)$$

### 3. Прямая задача

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\begin{aligned} \tau = \omega t, \quad \xi &= \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \eta_{22} = \frac{L^2 \omega^2}{c_s^2}, \\ \eta_{31} &= \frac{(\rho F + \rho_i F) L^2 \omega^2}{GF}, \quad \eta_{32} = \eta_{31} + \chi, \\ \chi &= \frac{m_l L^2 \omega^2}{GF}, \quad \tilde{w}_k = \frac{w_k}{W}, \end{aligned}$$

представим (6) в виде (в дальнейшем тильда над  $w$  опускается):

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} - \eta_{22} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi^3} - (\eta_{31} + \chi) \frac{\partial^3 w_2}{\partial \xi \partial \tau^2} &= \\ \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} - \eta_{31} \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi \partial \tau^2}, \quad \xi &= \xi_c. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели трубопровода с присоединенной массой фигурируют ее координата  $\xi_c$  и параметр  $\chi$  для распределенной массы.

Представим (7) в виде

$$w_i = \sin(\tau - \xi), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c. \quad (9)$$

Решение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} w_r &= A_r \cos(\tau + \xi) + B_r \sin(\tau + \xi) + \\ &+ e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1} (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau), \\ -\infty &\leq \xi \leq \xi_c, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_{i1} &= A_{i1} \cos(\tau - \alpha_2 \xi / \alpha_1) + B_{i1} \sin(\tau - \xi) + \\ &+ e^{-\beta_2(\xi - \xi_c)/\alpha_1} (C_{i1} \cos \tau + D_{i1} \sin \tau), \\ \xi_c &< \xi \leq \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как при  $\xi \leq \xi_c$  выполняются равенства  $w_1 = w_i + w_r$ , а при  $\xi > \xi_c$  — равенства  $w_2 = w_{i1}$ ,

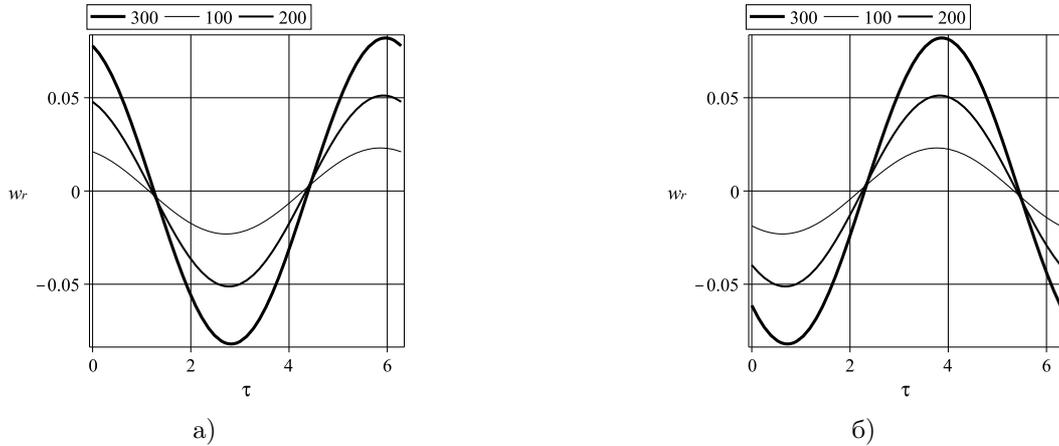


Рис. 2. Перемещения стержня в отраженной волне для начальной координаты распределенной массы  $\xi_c = 20\pi/3$  (а),  $\xi_c = 40\pi/3$  (б) при различных  $m_l$

из условий (8) с учетом соотношений (9)–(11) следует система уравнений, решение которой здесь не приводится. При  $\chi = 0$  волна, не отражаясь, проходит далее. Решения (10), (11) можно представить также в виде:

$$w_r = k_r \sin((\tau + \xi) - \phi_r) + k_{r1} e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1} \times \sin(\tau - \phi_{r1}), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c,$$

$$w_{i1} = k_{i1} \sin((\tau - \xi) - \phi_{i1}) + k_{i2} e^{-\beta_2(\xi - \xi_c)/\alpha_1} \times \sin(\tau - \phi_{i2}), \quad \xi_c < \xi \leq \infty,$$

где  $k_r, k_{r1}$  и  $k_{i1}, k_{i2}$  — коэффициенты отражения и прохождения;  $\phi_r, \phi_{r1}$  и  $\phi_{i1}, \phi_{i2}$  — соответствующие фазы:

$$k_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2}, \quad k_{r1} = \sqrt{C_r^2 + D_r^2},$$

$$k_{i1} = \sqrt{A_{i1}^2 + B_{i1}^2}, \quad k_{i2} = \sqrt{C_{i1}^2 + D_{i1}^2},$$

$$\phi_r = \arctan(-A_r/B_r), \quad \phi_{r1} = \arctan(-C_r/D_r),$$

$$\phi_{i1} = \arctan(-A_{i1}/B_{i1}), \quad \phi_{i2} = \arctan(-C_{i1}/D_{i1}).$$

Перемещение  $w_r$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ), выраженное через амплитуду и фазу  $\delta$  волны, имеет вид:

$$w_r = A_r \cos \tau + B_r \sin \tau + e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1} \times (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau) = C \sin(\tau - \delta),$$

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \delta = -C_1/C_2,$$

где обозначено

$$C_1 = A_r + C_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}, \quad C_2 = B_r + D_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}.$$

Суммарное перемещение  $w_s$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi = 0$ ), выраженное через амплитуду \* и фазу  $\delta^*$  волны:

$$w_s = w_i + w_r = \sin \tau + A_r \cos \tau + B_r \sin \tau + e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1} (C_r \cos \tau + D_r \sin \tau) = C^* \sin(\tau - \delta^*),$$

$$C^* = \sqrt{C_1^{*2} + C_2^{*2}}, \quad \tan \delta^* = -C_1/C_2^*,$$

где  $C_2^* = 1 + B_r + D_r e^{-\beta_1 \xi_c / \alpha_1}$ .

Решение проведено численно для следующих параметров системы:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0.77 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_i = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $R_i = 0.259$  м,  $R = 0.265$  м,  $m_l = 100$  кг/м,  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>,  $x_c = 20\pi/3$  м. Параметры отраженной волны следующие:  $A_r = 0.021029$ ,  $B_r = 0.009465$ ,  $C_r = 0.046190$ ,  $D_r = 0.002168$ .

На рис. 2 даются зависимости перемещения элемента стержня в отраженной волне от безразмерного времени  $\tau$  для двух значений начальной координаты распределенной массы:  $\xi_c = 20\pi/3$  (фрагмент а),  $\xi_c = 40\pi/3$  (фрагмент б)  $\xi = 0$  и различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м). Видно, что отраженные волны зависят от величины распределенной массы  $m_l$  и ее начальной координаты  $\xi_c$ . Чем больше величина распределенной массы  $m_l$ , тем больше величина сигнала в отраженной волне.

Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) представлены на рис. 3(а), а от интенсивности распределенной массы  $m_l$  для различных значений  $\xi_c$  даются на рис. 3(б). Анализ показывает, что сдвиг фазы в отраженной волне зависит от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности. Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения начальной координаты распределенной массы и ее величины.

Рис. 4 содержит зависимости коэффициента отражения  $C$  от интенсивности распределенной массы  $m_l$  для различных значений  $\xi_c$  (фрагмент а) и от координаты  $\xi_c$  для интенсивностей распределенной массы  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) (фрагмент б). С ростом интенсивности распределенной массы  $m_l$  происходит увеличение коэффициента отражения  $C$ .

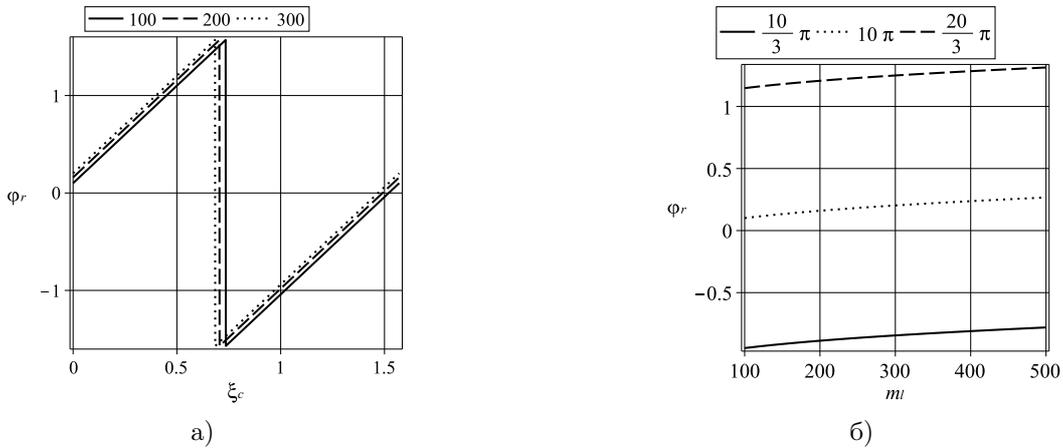


Рис. 3. Зависимости сдвига фазы в отраженной волне от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) и от интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) для различных значений  $\xi_c$

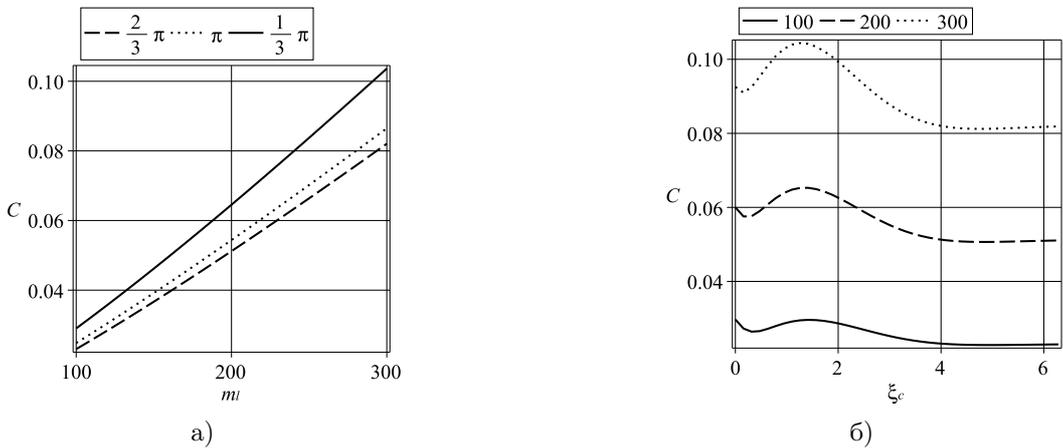


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения  $C$  от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) при различных  $m_l$  (100; 200; 300 кг/м) и от интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) для различных значений  $\xi_c$

### 4. Обратная задача

Могут быть использованы различные способы [5] определения начальной координаты распределенной массы и ее интенсивности в зависимости от измеряемых характеристик волны с помощью приборных средств. Рассмотрим только один способ: выделение отраженной волны и использование данных измерений перемещений в два момента времени. Могут быть и другие способы выделения отраженных волн. Если обозначить через  $(w_r)_1$  и  $(w_r)_2$  замеренные значения перемещения в отраженной волне в точке  $\xi = 0$  в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в пределах полупериода колебания, причем, для простоты принять  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \pi/2$ , то из (10) последует система уравнений:

$$\begin{aligned} (w_r)_1 &= A_r + C_r e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1}, \\ (w_r)_2 &= B_r + D_r e^{-\beta_1(\xi_c - \xi)/\alpha_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Например, решение прямой задачи для вышеприведенных данных и  $\xi_c = 2\pi/3$ ,  $m_l = 100$  кг/м дает, что  $(w_r)_1 = 0.0268385071$ ,  $(w_r)_2 = -0.009193060821$ .

Параметры  $\xi_c$ ,  $m_l$  определяются из (12) при заданных значениях  $(w_r)_1$ ,  $(w_r)_2$ . Система (12) может быть решена численно. Например, для  $(w_r)_1 = 0.0268$ ,  $(w_r)_2 = -0.0091$  решение системы уравнений дает, что  $\xi_c = 2.096$ ;  $m_l = 99.805$ .

На рис. 5 приводятся зависимости начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) и ее интенсивности  $m_l$  (б) от  $(w_r)_1$  для различных значений  $(w_r)_2$ . Вычисления показывают, что по двум замеренным значениям  $(w_r)_1$ ,  $(w_r)_2$  определяются начальная координата распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивность  $m_l$ .

Возможно использование и других измерений параметров падающей, отраженной от воздушной

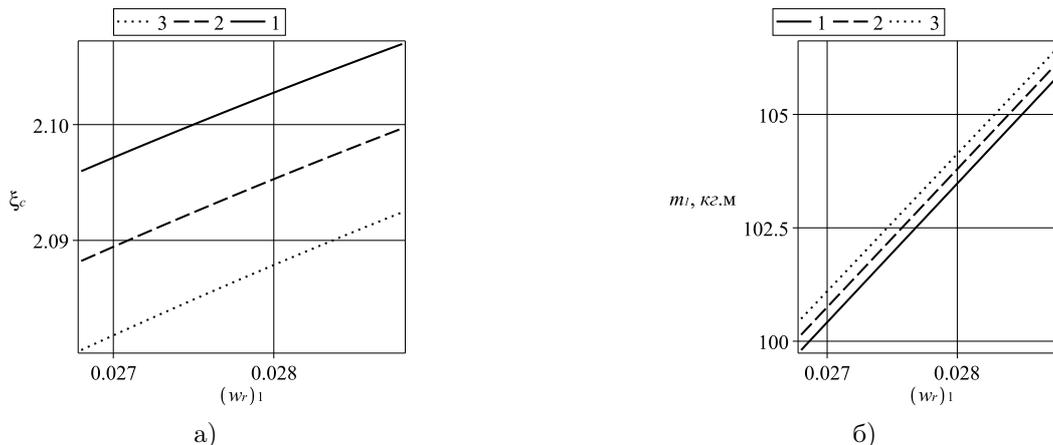


Рис. 5. Зависимости начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  (а) и интенсивности распределенной массы  $m_l$  (б) от  $(w_r)_1$  для различных значений  $(w_r)_2$ :  $-0.0091$  (1);  $-0.0095$  (2);  $-0.0099$  (3)

полости волн и проходящей волны.

Анализ отраженных волн в стержне позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и сдвиг фазы зависят от начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности  $m_l$ . Таким образом, сдвиг фазы в отраженной волне можно использовать для определения начальной координаты распределенной массы  $\xi_c$  и ее интенсивности  $m_l$ .

Полученная методика может использоваться при разработке системы диагностирования длинных трубопроводных систем.

### Список литературы

- [1] Сидоров Б.В., Мартынов С.А. Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18–19.
- [2] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12, № 3. С. 37–42.
- [3] Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. № 5. С. 29–35.
- [4] Timoshenko S., Young D.H., Weaver. W. Vibration problems in engineering. John Wiley & Sons. 1974. 472 p. (Русск. пер. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.)
- [5] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 3. С. 58–67.