

Математическая модель динамики неньютоновской аномально термовязкой жидкости в круглой трубе¹

Хизбуллина С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

На основе уравнений динамики сплошной среды разработана математическая модель эволюции течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с учетом неньютоновских свойств жидкости и немонотонной зависимости вязкости от температуры. Качественная картина движения подобна картине движения ньютоновской аномально термовязкой жидкости. Существование аномалии вязкости приводит к уменьшению гидравлического сопротивления потока.

1. Введение

Высокие темпы развития химической и перерабатывающей отраслей промышленности открывают широкие перспективы использования аномально термовязких жидкостей, существенно отличающихся по своим физическим свойствам от обычных ньютоновских жидкостей и проявляющие ярко выраженную зависимость своих теплофизических и физико-химических параметров от температуры. Знание закономерностей течения рабочих сред с переменными параметрами, обеспечивающих контроль за качественными показателями, — важное условие создания эффективных технологий.

При решении классических задач гидродинамики физические параметры, такие как вязкость, теплоемкость и теплопроводность, как правило, считаются постоянными. Но в реальных физических системах процессы переноса в жидкостях зависят от изменения упомянутых параметров от температуры. Одним из определяющих параметров при течении жидкостей, представляющих собой растворы или расплавы полимеров, является вязкость, которая, как оказалось, существенно влияет на структуру самого течения. Вязкость большинства жидких сред представляет собой монотонно убывающие функции температуры, и такие течения уже достаточно хорошо изучены (например, [1]). Но в природе встречаются вещества, в которых в определенном диапазоне температур могут проис-

ходить процессы полимеризации и деполимеризации молекул, а вязкость в этом случае имеет немонотонную зависимость от температуры. Под аномально термовязкой жидкостью понимается жидкость, у которой вязкость немонотонно зависит от температуры. Учет эффектов течения жидкостей, обусловленных зависимостью вязкости от температуры, представляет сложную задачу, сопряженную с необходимостью применения современных вычислительных средств и методов математического моделирования.

Ранее, в работах [2–4] были проведены численные исследования течения аномально термовязких жидкостей в плоском канале и цилиндрической трубе с неоднородным температурным полем. В них были установлены основные закономерности течения, связанные с влиянием распределения полей температуры и вязкости на гидродинамические параметры потока.

Цель данной работы состоит в создании математической модели динамики неньютоновской жидкости, реологические свойства которой описываются степенным законом Оствальда де Вилла в предположении, что вязкость жидкости зависит от температуры немонотонным образом.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неизотермическое течение жидкости в круглой трубе диаметром D и длиной L с осевой симметрией, возникающее под действием постоянного перепада давления Δp . В начальный момент времени жидкость в трубе покоится и имеет температуру, равную температуре стенке канала T_w . Температура втекающей в канал жидкости постоянна

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фонда фундаментальных исследований ОЭ–13 ОЭМПУ РАН «Вихри и волны в сложных средах» и Программы поддержки молодых ученых Президиума РАН

и равна T_{in} . Будем считать, что массовые силы отсутствуют, а теплофизические константы жидкости не зависят от температуры.

Основными уравнениями, описывающими неизотермическое течение неньютоновской аномально термовязкой жидкости, являются уравнения количества движения, уравнение сохранения массы, уравнение сохранения энергии и уравнения, связывающие девиаторы напряжений и скоростей деформаций:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}; \\ \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \kappa \Delta T + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\tau}}; \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\vec{u} = (u, w)$ — вектор скорости жидкости; p — давление жидкости; ρ — плотность жидкости; T — температура жидкости; $\underline{\underline{\tau}}$ — девиатор напряжения; c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении; κ — коэффициент теплопроводности; $\underline{\underline{D}}$ — тензор скоростей деформации.

Реологические свойства жидкости описываются обобщенным степенным законом Оствальда де Вилла [5], а также учитывают немонотонную зависимость вязкости от температуры в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2B(I_2, T) \dot{e}_{ij}, \\ B(I_2, T) &= \mu_{min} \left[1 + A_1 e^{-A_2(T-T_*)^2} \right] (I_2)^{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь B — эффективная вязкость; τ_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; \dot{e}_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформации; n — индекс течения (показатель нелинейности); $A_1 = (\mu_{max}/\mu_{min} - 1)$ — параметр аномалии вязкости, характеризующий отношение максимального и минимального значений вязкости в диапазоне температур (T_w, T_{in}) ; $A_2 > 0$ — параметр аномалии вязкости, характеризующий степень заполненности данного температурного диапазона аномалией вязкости (его увеличение свидетельствует о сужении диапазона температур, на котором происходит немонотонное изменение вязкости); $T_* = 0.5(T_{in} + T_w)$ — температура, при которой жидкость имеет максимальную вязкость.

Уравнение (2) описывает поведение как псевдопластичных ($n < 1$), так и дилатантных ($n > 1$) жидкостей. При $n = 1$ и $A_1 = 0$ имеем обычную ньютоновскую жидкость с постоянным коэффициентом динамической вязкости.

Для удобства последующего численного решения проведем обезразмеривание системы уравнений (1)–(2):

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{D}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tu_0}{L}, \quad \varepsilon = \frac{D}{L}, \\ \tilde{u} &= \frac{u}{\varepsilon u_0}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{u_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \\ \tilde{T} &= \frac{T - T_{min}}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_{max} - T_{min}, \\ \text{Re} &= \frac{\rho D^n u_0^{2-n} \varepsilon^{1-n}}{\mu_{min}}, \quad \text{Pe} = \frac{\rho c_p u_0 D}{\kappa}, \\ \text{Ec} &= \frac{u_0^2}{c_p \Delta T}, \quad u_0 = \frac{nD}{2(n+1)} \left(\frac{D \Delta p}{4L \mu_{min}} \right)^{1/n}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу осесимметричности постановки задачи удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , начало которой лежит в центре входного сечения трубы, ось z совпадает с осью трубы, ось r направлена от оси трубы к стенке. С учетом (3) выпишем систему уравнений (1)–(2) в безразмерном виде и для облегчения записи опустим значки тильда над безразмерными переменными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u^2 - \frac{2r B_0}{\varepsilon \text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2B_0}{\varepsilon \text{Re}} \frac{u}{r^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(w u - \frac{B_0}{\text{Re}} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial r}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u w - \frac{r B_0}{\text{Re}} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(w^2 - \frac{2B_0 \varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u T - \frac{r}{\varepsilon \text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(w T - \frac{\varepsilon}{\text{Pe}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon \text{Ec}}{\text{Re}} B_0 I_2^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $B_0 = \left[1 + A_1 e^{-A_2(\Delta T)^2(T-0.5)^2} \right] (I_2)^{n-1}$,

$$I_2 = \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Начальные и граничные условия для скорости, давления и температуры в безразмерном виде запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad \vec{u} = 0, \quad p = 0, \quad T = 0, \\ z = 0 : \quad p = \frac{\Delta p}{\rho u_0^2}, \quad T = 1, \\ z = 1 : \quad p = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ r = 0.5 : \quad \vec{u} = 0, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

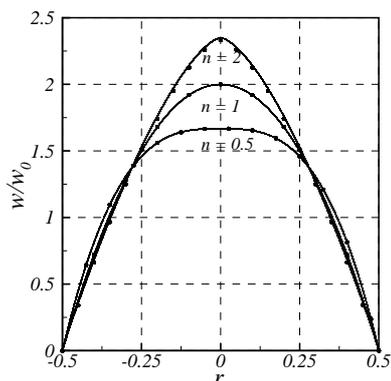


Рис. 1. Характерные профили осевой скорости неньютоновских жидкостей при течении в круглой трубе для численного (точками) и аналитического (сплошная линия) решений

Уравнения (4)–(6), дополненные начальными и граничными условиями (7), полностью описывают течение неньютоновской anomalно термовязкой жидкости в круглой трубе. Построенная математическая модель может использоваться как для псевдопластичных, так и дилатантных жидкостей.

3. Результаты моделирования

Численное интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений (4)–(6) выполнялось с помощью метода контрольного объема с использованием алгоритма Simple [6], модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости. Для решения полученных систем алгебраических уравнений использовался метод переменных направлений. В качестве тестовой задачи рассматривалось стационарное течение степенной жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в круглой трубе. В этом случае задача имеет аналитическое решение, и осевая скорость определяется по формуле:

$$w(r) = \frac{nR}{n+1} \left(\frac{R\Delta p}{2L\mu_{min}} \right)^{1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right], \quad (8)$$

где $R = D/2$ — радиус трубы. Для ньютоновской жидкости $n = 1$, $B = \mu$, и уравнение превращается в известную формулу Пуизейля [7].

На рис. 1 приведены типичные профили осевой скорости при течении неньютоновской жидкости в круглой трубе при различных значениях индекса течения n . Точками показано численное решение системы (1)–(2), а сплошной линией — аналитическое решение, определяемое по формуле (8).

Проведенные численные исследования течения неньютоновской anomalно термовязкой жидкости

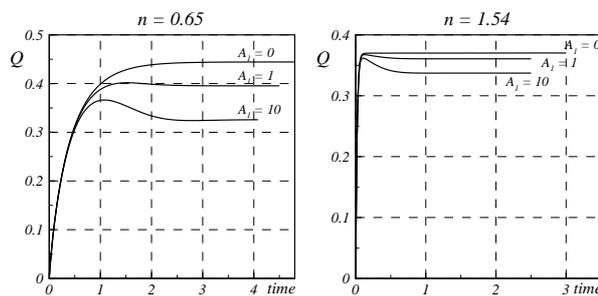


Рис. 2. Зависимость расхода от времени для различных значений параметра anomalии A_1

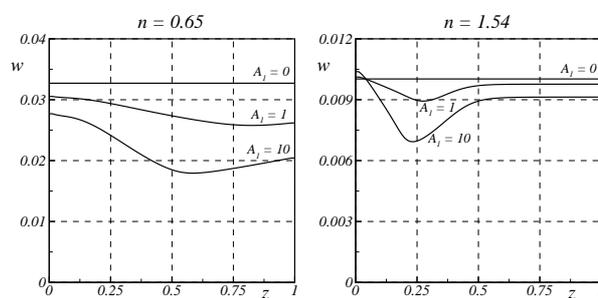


Рис. 3. Распределение значений осевой скорости вдоль оси трубы для различных значений параметра anomalии A_1

в круглой трубе с осевой симметрией показали, что распределения полей физических величин (вязкости, температуры, компонент вектора скорости и давления) имеют структуру аналогичную течению ньютоновской anomalно термовязкой жидкости. Как и ранее [2–4], оказалось, что процесс втекания anomalно термовязкой жидкости сопровождается образованием термовязкой структуры — «вязкого барьера», создающего значительное гидравлическое сопротивление потоку. Развитие течения до его установления приводит к существенному вытягиванию вязкого барьера по потоку и возникновению кольцевых пристеночных областей изменения вязкости, отражающих зависимость динамической вязкости от температуры.

Рассмотрим, как изменяются значения расхода, осевой скорости, температуры и вязкости вдоль оси трубы при течении псевдопластичной ($n = 0.65$) и дилатантной ($n = 1.54$) жидкостей для различных значений амплитудного значения вязкости A_1 (рис. 2–4). Для наглядности на рисунках приведены кривые для жидкости с постоянной вязкостью, характеризуемой значением параметра anomalии $A_1 = 0$. Значение параметра anomalии A_2 полагалось равным 0.01.

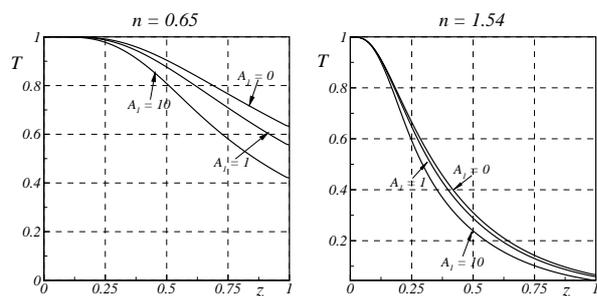


Рис. 4. Распределение значений температуры вдоль оси трубы для различных значений параметра аномалии A_1

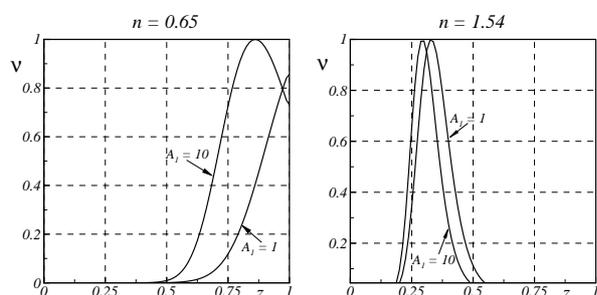


Рис. 5. Распределение значений вязкости вдоль оси трубы для различных значений параметра аномалии A_1

На основании численных расчетов было установлено, что величина расхода существенно образом зависит от параметра аномалии A_1 . При этом увеличение максимального значения вязкости, характеризуемого параметром A_1 , способствует уменьшению расхода (рис. 2).

Интересным представляется тот факт, что с увеличением параметра аномалии A_1 разница между максимальным и минимальным значениями осе-

вой скорости начинает расти (рис. 3). Несмотря на то, что теплоемкость и теплопроводность рассматриваемой жидкости не зависят от температуры, распределение температуры вдоль оси трубы зависит от амплитуды вязкости (рис. 4). С увеличением аномалии вязкости A_1 зона аномально высоких значений вязкости располагается ближе ко входу в трубу (рис. 5), что связано с уменьшением расхода жидкости, а именно с замедлением течения. В связи с чем с возрастанием параметра A_1 жидкость охлаждается больше.

Список литературы

- [1] Аристов С.Н. Стационарное течение жидкости с переменной вязкостью // Доклады академии наук. 1998. Т. 359, № 5. С. 625–628.
- [2] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
- [3] Хизбуллина С.Ф. Численное исследование течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры // Вестник Башкирского университета. 2006. № 2. С. 22–25.
- [4] Хизбуллина С.Ф., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф., Кутуков С.Е. Моделирование течения реологически сложной нефти на начальном участке «горячего» трубопровода // Нефтегазовое дело. 2006. № 4. С. 259–262.
- [5] Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: «Химия», 1977. 439 с.
- [6] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- [7] Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964. 216 с.