



Свободная конвекция вертикально стратифицированной жидкости в плоской ячейке¹

Моисеев К.В.* , Хизбуллина С.Ф.* , Бахтизин Р.Н.**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

**Академия наук Республики Башкортостан, Уфа

В работе рассматривается свободно-конвективное течение Рэлея–Бенара ньютоновской жидкости с учетом вертикальной стратификации в плоской ячейке. Предлагается замкнутая математическая модель свободной конвекции неоднородной жидкости в предположении линейной зависимости плотности жидкости от температуры, концентрации примеси и солёности. Численно показано, что исходная неоднородность жидкости, в частности плотности по высоте, приводит к осложнению процесса свободной конвекции в виде образования слоистых структур.

1. Введение

Процессы свободной конвекции в жидкостях и газах широко распространены не только в природе (атмосфера, океан, мантия земли и др.), но и при реализации многочисленных технологических операций (охлаждение, нагрев, осаждение и т.п.). Требования к полноте описания динамики этих процессов заставляют специалистов смотреть по новому на существующие теоретические и экспериментальные методы исследования, поскольку качество современных моделей на больших и малых временных интервалах, надёжность индикаторов перехода состояния из нормального в критическое, вплоть до катастрофического, нуждаются в существенном повышении. Признанные свидетельства влияния малых факторов, таких как неоднородность плотности и вязкости, стратификация, наличие примесей, потоков тепла и вещества на структуру и динамику течений до сих пор не получили надёжного математического описания. Недостаточно изучено и влияние стратификации, с действием которой связывается существование тонкой структуры течений в окружающей среде и техносфере. В настоящее время увеличивается объём экспериментальных данных, которые не удаётся описать в рамках традиционных представлений и с помощью приближённых

и констативных моделей. В работе предпринята попытка выявить особенности и закономерности, возникающие в процессе свободно-конвективного теплообмена в плоской ячейке, и установить механизм образования слоистых структур.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о свободной конвекции вертикально стратифицированной по плотности жидкости в плоской ячейке. При построении математической модели используется приближение Обербека–Буссинеска [1]. Модель строится на основе фундаментальной системы дифференциальных уравнений, включающей уравнение неразрывности, уравнение сохранения количества движения, уравнение сохранения энергии, записанное относительно температуры, и уравнения диффузии стратифицирующей компоненты и солёности:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \nu_0 \Delta \vec{v} + (\rho - \rho_0) \vec{g}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T &= \chi_0 \Delta T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla (C \vec{v}) &= D_0 \Delta C, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla (S \vec{v}) &= D_S \Delta S,\end{aligned}$$

где ν_0 — кинематическая вязкость жидкости при средних значениях концентрации и температуры; χ_0 — коэффициент температуропроводности жид-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-97060-р_поволжье_a) и Программы фонда фундаментальных исследований ОЭ-13 ОЭММПУ РАН «Вихри и волны в сложных средах».

кости; D_0 — коэффициент диффузии жидкости; D_S — коэффициент диффузии соли.

В данной работе считается, что плотность жидкости зависит линейно от температуры T , концентрации примеси C и солености S в следующем виде:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0) + \beta_S(S - S_0)),$$

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S,C}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p,S,T},$$

$$\beta_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T,C},$$

где T_0 , C_0 , S_0 — некоторые реперные значения, от которых отсчитывается температура, концентрация примеси и соленость соответственно; ρ_0 — невозмущенная плотность; β_T , β_C , β_S — коэффициенты температурного, концентрационного и солевого расширения (сжатия) жидкости соответственно. Введение примесной компоненты оправдано необходимостью описания визуализации течений в лабораторных экспериментах.

Предполагается, что плотность жидкости не зависит от давления и так же, как и давление представляет собой сумму невозмущенной и возмущенной компонент:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где p_0 и ρ_0 удовлетворяют уравнению гидростатики:

$$\nabla p_0 = \rho_0 g.$$

Для малых отклонений p' и ρ' справедливы соотношения:

$$p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0.$$

Кроме того, при выводе уравнений учитывалось, что плотность жидкости всюду постоянна, за исключением слагаемого, учитывающего подъемную силу.

Для численного решения полученную замкнутую систему дифференциальных уравнений необходимо привести к безразмерному виду. Для этого введем соответствующие масштабы характерных величин

$$t^* = \frac{L^2}{\nu_0}, \quad v^* = \frac{\nu_0}{L}, \quad p^* = \frac{\rho_0 \nu_0^2}{L^2}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

и следующие критерии подобия:

$$\text{Pr} = \frac{\nu_0}{\chi_0} \text{ — число Прандтля,}$$

$$\text{Sc} = \frac{\nu_0}{D_0} \text{ — число Шмидта,}$$

$$\text{Sc}_S = \frac{\nu_0}{D_S} \text{ — солевое число Шмидта,}$$

$$\text{Gr}_T = \frac{g \beta_T \Delta T L^3}{\nu_0^2} \text{ — число Грасгофа,}$$

$$\text{Gr}_C = \frac{g \beta_C \Delta C L^3}{\nu_0^2} \text{ — концентрационное число}$$

Грасгофа,

$$\text{Fr} = \frac{\nu_0^2}{gL^3} \text{ — число Фруда,}$$

где t^* , v^* и p^* — характерные время, скорость и давление; θ — безразмерное возмущение температуры; ΔT — перепад температуры; L — характерный размер области (здесь: высота исследуемой области); ΔC — перепад концентрации примеси.

Тогда, учитывая, что жидкость линейно стратифицирована по высоте, уравнения свободной конвекции в двумерной области в безразмерной форме запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} +$$

$$+\text{Gr}_T \theta + \text{Gr}_C \tilde{C} + \frac{\tilde{S}}{\text{Fr}^2} \frac{L}{\Lambda_S},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Sc}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Sc}_S} \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} \right) + v \frac{L}{\Lambda_S},$$

где u и v — возмущения горизонтальной и вертикальной составляющих вектора скорости жидкости; \tilde{p} — возмущение давления; \tilde{C} — возмущение концентрации; \tilde{S} — возмущение солености.

Если считать, что в начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя и линейно стратифицирована по плотности, то начальные условия запишутся в виде:

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0,$$

$$\tilde{S}|_{t=0} = 1 - y \frac{L}{\Lambda_S}, \quad \tilde{C}|_{t=0} = 0, \quad \Lambda_S = \left| \frac{1}{S_0} \frac{dS}{dy} \right|^{-1}.$$

В качестве граничных условий для концентрации и солености использовались условия отсутствия потока через границы ячейки; для компонент вектора скорости на всех границах предполагались условия прилипания ($u = 0$ и $v = 0$); для температуры — при подогреве снизу:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0,$$

$$\theta|_{y=1} = -0,5, \quad \theta|_{y=0} = 0,5,$$

а при подогреве сбоку:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\theta|_{x=1} = -0,5, \quad \theta|_{x=0} = 0,5.$$

3. Численный метод и тесты

Для изучения закономерностей свободной конвекции был построен алгоритм численного решения и разработан компьютерный код. Численная методика решения полученной системы дифференциальных уравнений основывается на хорошо зарекомендовавшем себя методе контрольного объема [2]. Для расчета поля течения использовался полунейвный метод для связывающих давление уравнений — алгоритм SIMPLE [3]. Для увеличения порядка аппроксимации по времени до второго порядка точности применялась полностью неявная трехслойная схема второго порядка [4]. Далее с помощью методов параллельных высокопроизводительных вычислений была произведена оптимизация программного кода. В частности, для сокращения времени расчета применялись методы параллельного программирования OpenMP [5].

Тестирование компьютерного кода и верификация полученных результатов производилась путем сравнения с опубликованными в мировой научной литературе данными по задаче о свободной конвекции вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью при подогреве сбоку и снизу. Результаты численных расчетов разработанного программного кода и опубликованных данных приведены в табл. 1 и 2. В табл. 1 представлены результаты вычислений чисел Нуссельта на подогреваемой границе ячейки для четырех различных значений числа Рэлея Ra [6]. В табл. 2 представлены результаты вычислений максимальных компонент скорости в средних сечениях ячейки, числа Нуссельта на подогреваемой границе, в среднем вертикальном сечении ячейки, а также максимальное и минимальное значения числа Нуссельта на подогреваемой границе ячейки на различных сетках при значении числа Рэлея $Ra = 10^4$ [7]. Сходимость используемого метода и расчетной схемы представлена в работе [8]. Результаты тестовых расчетов показывают, что разработанный алгоритм численного решения свободно-конвективных течений ньютоновской жидкости в плоской ячейке дает адекватные и достоверные решения поставленной задачи.

Таблица 1. Сравнение результатов расчетов с работой [6], сетка 101×101

Ra	Nu _H [6]	Nu _H
10^3	1.0004	1.0000
10^4	2.1581	2.1657
10^5	3.9103	3.9371
10^6	6.3092	6.3102

Таблица 2. Сравнение результатов расчетов с работой [7], $Ra = 10^4$

	40×40	80×80	160×160	[7]
$u_{(0.5,y)}^{\max}$	16,112	16,113	16,119	16,183
y	0,825	0,825	0,825	0,823
$v_{(x,0.5)}^{\max}$	19,777	19,771	19,770	19,629
x	0,125	0,125	0,125	0,119
Nu ₀	2,250	2,251	2,252	2,245
Nu _{1/2}	2,250	2,251	2,252	2,245
Nu _{max}	3,5109	3,5119	3,5180	3,5138
y	0,15	0,15	0,144	0,144
Nu _{min}	0,579	0,579	0,579	0,585
y	1	1	1	1

4. Результаты численного моделирования

Исследованию процессов свободной конвекции в жидкостях с неравномерной плотностью по высоте посвящено достаточно много экспериментальных работ, в которых визуальными наблюдениями и оптическими методами исследовано образование и развитие различных режимов конвекции. В частности, показано, что при наличии неоднородности плотности жидкости по высоте и при возникновении поперечного градиента температуры возникает слоистое течение жидкости [9, 10]. Причем образование слоистой структуры является сложным явлением, которое является результатом совместного влияния процессов теплопроводности, диффузии и свободной конвекции.

В данной работе приведены результаты численного моделирования свободной конвекции стратифицированной по высоте жидкости в плоской области с соотношением сторон $4/3$. Все вычисления производились на равномерной сетке с количеством узлов 200×150 при следующих постоянных параметрах задачи: $Pr = 7$, $Sc = 700$, $Sc_S = 700$, $Fr = 0.1$, $\Lambda_s = 100$, $Gr_C = 0$, число Грасгофа менялось в пределах $10^{-1} \leq Gr_T \leq 10^3$.

На рис. 1 приведено поле солёности для различных чисел Грасгофа Gr_T . Видно, что при ма-

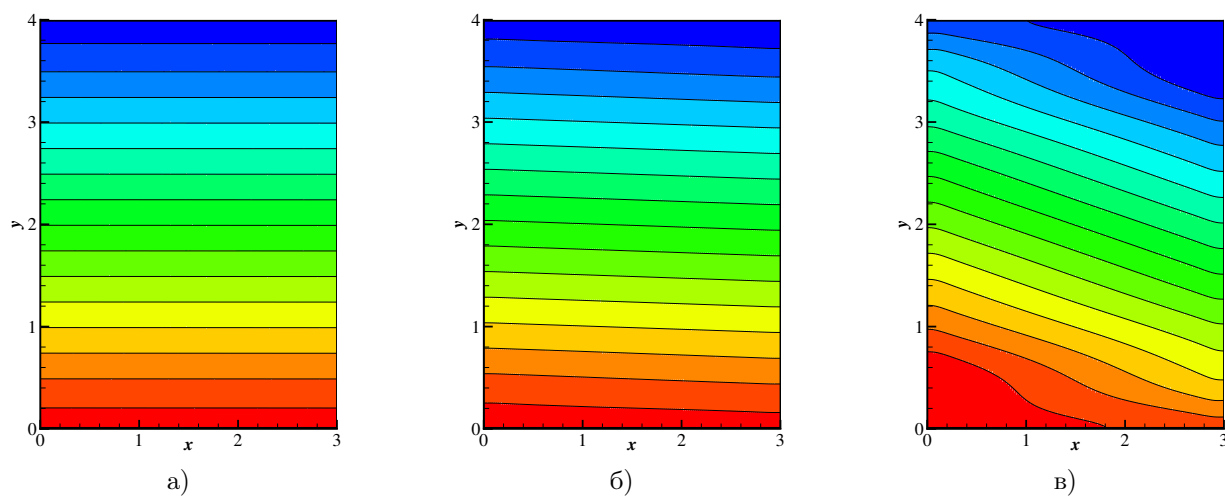


Рис. 1. Поле солёности: а) $Gr_T = 10^{-1}$, б) $Gr_T = 10$, в) $Gr_T = 10^2$

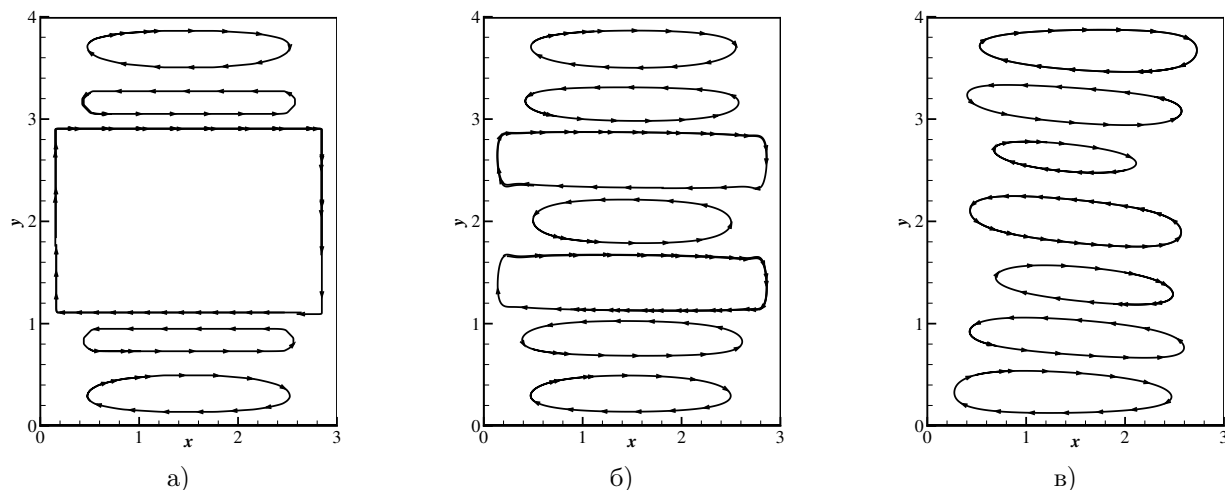


Рис. 2. Линии тока для установившегося режима конвекции: а) $Gr_T = 10^{-1}$, б) $Gr_T = 10$, в) $Gr_T = 10^2$

рых числах Грасгофа поле солёности почти горизонтально, при увеличении числа Грасгофа происходит отклонение поля солёности на некоторый угол. Это связано с тем, что при увеличении числа Грасгофа увеличивается температурная неоднородность течения и тепловые эффекты преобладают над концентрационными. Так, вдоль нагретой стенки (левая граница плоской ячейки) вещество поднимается, а вдоль охлаждаемой стенки (правая граница ячейки) — опускается, и поле солёности искажается в соответствии с направлениями тепловых потоков.

На рис. 2 представлены линии тока для установившегося режима конвекции для тех же значений чисел Грасгофа, что и на рис. 1. Видно, что при свободно-конвективном течении вертикально стратифицированной по плотности жидкости об-

разуются горизонтальные вихревые структуры, то есть картина течения существенно отличается от свободно-конвективного течения не стратифицированной жидкости, при котором в рассматриваемой области образуется единый контур течения или, так называемый, одновихревой режим течения. Подобные расслоенные режимы течения стратифицированной жидкости наблюдаются и в экспериментах. Кроме того, можно заметить, что при достаточно малых числах Грасгофа (рис. 2(а)) образуется зона в центральной части исследуемой ячейки, где течение практически отсутствует и образуется единый вихрь. А вдоль верхней и нижней границ ячейки начинает образовываться расслоение (рис. 2(б)). С увеличением числа Грасгофа структура течения полностью соответствует расслоенному режиму течения. При дальнейшем увеличении числа Грасго-

фа сначала горизонтальные вихри начинают отклоняться на некоторый угол, а при некотором критическом значении образуется одновихревой режим, при котором расслоенного режима течения не наблюдается (рис. 2(в)).

5. Заключение

Проведено численное исследование модели свободно-конвективного течения стратифицированной по высоте неоднородной жидкости в плоской ячейке, подогреваемой сбоку. Представленная математическая модель учитывает различные эффекты тонкой структуры, возникающие в солевом растворе при нагревании. Показано, что при определенных параметрах задачи возникают расслоенные режимы течения, которые наблюдаются в экспериментах.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный алгоритм можно использовать для описания процессов теплообмена в стратифицированных неоднородных средах при свободной конвекции.

Список литературы

- [1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [2] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.

- [3] Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamis. Springer, 3ed, 2001. 431 p.
- [4] Versteeg H.K. and Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. Longman Group Ltd, 1995. 258 p.
- [5] Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М.: МГУ, 2009. 77 с.
- [6] Ouertatani N., Ben Cheikh N., Ben Beya B., Lili T. Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Benard convection in an enclosure // Comptes Rendus. 2008. V. 336, № 5. P. 464-470.
- [7] Quere P.Le, Alziary T. De Roquefort. Computation of natural convection in two dimensional cavities with Chebyshev polynomials // J. Comput. Phys. 1985. V. 57, № 2. P. 210-228.
- [8] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, № 4(24). С. 51-59.
- [9] Sabbah C., Pasquetti R., Peyret R., Levitsky V., Chashechkin Y.D. Numerical and laboratory experiments of sidewall heating thermohaline convection // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2001. V. 44. P. 2681-2697.
- [10] Бакиев А.В., Хазиев Н.Н. Гидродинамические процессы в емкостях и аппаратах, модернизация их конструкции. Уфа: Гилем, 2008. 192 с.