УДК 533.951

Совместность уравнений плоских тепловых движений газа[1]

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Предложен оригинальный способ приведения в инволюцию переопределенной системы дифференциальных уравнений, описывающей плоские изотермические движения газа без расширений.

1. Введение

Термодинамические величины давление p, плотность $\rho = V^{-1}$, удельная внутренняя энергия ε, температура T, энтропия S сохраняются в частице, когда произвольный ограниченный объем газа не изменяет своей величины при движении. При этом если движение изотермическое, то уравнения гладкого движения записываются в виде [1]:

$$D\vec{u} + \nabla i = 0, \quad di = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Здесь $\vec{u}$ — скорость частицы; $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ — оператор полного дифференцирования по времени; $i = \varepsilon + pV - TS$ — полный термодинамический потенциал.

В плоском случае в декартовых координатах получается переопределенная система дифференциальных уравнений:

$$u_t + uu_x + vu_y + i_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + i_y = 0,$$
$$i_t + ui_x + vi_y = 0, \quad u_x + v_y = 0.$$

Лагранжевы переменные определяются решением задачи

$$x_t = u, \quad y_t = v, \quad x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta.$$

Уравнения плоских тепловых движений в лагранжевых переменных принимают вид:

$$i_t = 0 \quad J_t = 0, \quad Jx_{tt} + i_\xi y_\eta - i_\eta y_\xi = 0,$$
$$Jy_{tt} - i_\xi x_\eta + i_\eta x_\xi = 0.$$

Отсюда следуют интегралы

$$i - i(\xi, \eta), \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1.$$

Если $i = i_0$ – постоянно, то решение имеет простой вид:

$$x = \xi - t\psi_\eta, \quad y = \eta + t\psi_\xi, \quad \psi_{\xi\xi}\psi_{\eta\eta} = \psi_{\xi\eta}^2.$$

Общее решение уравнения Монжа–Ампера есть линейчатая поверхность

$$\psi = -\lambda - f(\lambda)\xi - g(\lambda)\eta, \quad f'(\lambda)\xi + g'(\lambda)\eta = 1,$$

где f, g — произвольные функции.

Пусть $i(\xi, \eta) \neq \mathrm{const}$, тогда рассматривается замена переменных, сохраняющая площадь $i = i(\xi, \eta)$, $j = j(\xi, \eta)$, $i_\xi j_\eta - i_\eta j_\xi = 1$. Все решения уравнения образуют псевдогруппу [2]. Система уравнений плоских тепловых движений частично линеаризуется [2]

$$x_{tt} + y_j = 0, \quad y_{tt} = x_j, \quad x_i y_j - x_j y_i = 1.$$

С помощью оператора O поворота на $-\pi/2$ система записывается в векторном виде:

$$\vec{x}_j = O\vec{x}_{tt}, \quad \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = 1. \tag{1.1}$$

В декартовом базисе $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ координаты векторов таковы $\vec{x} = x\vec{k}_1 + y\vec{k}_2$, $O\vec{x} = y\vec{k}_1 - x\vec{k}_2$.

Векторная система (1.1) допускает группу преобразований G:

1) переносы $t' = t + a_0$, $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$, $i' = i + b_0$, $j' = j + g(i)$;

2) галилеевы переносы $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}$;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (НШ-6706.2012.1), РФФИ (гранты 11-01-00026-а, 11-01-00147-а, 12-01-00648), гранта 11.G34.31.0042 Правительства РФ по постановлению 220.

3) вращения $\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$, $\Lambda\Lambda^T = I$, $\det\Lambda = 1$;
4) растяжения $t' = at$, $j' = a^2 j$, $i' = a^{-2}b^2 i$, $\vec{x}' = b\vec{x}$,
где a_0, b_0, $\vec{a}$, $\vec{b}$, Λ, a, b — постоянные; $g(i)$ — произвольная функция.

Допускаются также отражения $\vec{x}' = -\vec{x}$ и $t' = -t$. Решения системы (1.1) разыскиваются с точностью до преобразований из групп G и отражений.

2. Цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений

Обозначим через $\vec{x}_k$ производные по t порядка k. Исключение производных по j из системы (1.1) дает равенство

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_2 = -1 = p_0.$$

Дифференцирование последнего равенства по j, исключение производных по j в силу (1.1) и интегрирование по t дает равенство

$$\vec{x}_i \cdot O\vec{x}_3 - \vec{x}_{1i} \cdot O\vec{x}_2 = q_0(i,j).$$

Дифференцирование последнего равенства по j, исключение производных по j в силу (1.1) и интегрирование по t дает равенство

$$\vec{x}_{1i} \cdot \vec{x}_3 = p_1(i,j), \quad 4p_1' = q_{0j},$$

где штрих обозначает дифференцирование по t.

По индукции доказывается утверждение.

Теорема 1. Справедлива цепочка следствий векторной системы (1.1):

$$\vec{x}_{i\,k+1} \cdot \vec{x}_{k+3} = p_{k+1}, \quad 4p_{k+1}' = p_k''' + q_{k\,j}, \tag{2.1}$$

$$\vec{x}_{i\,k} \cdot O\vec{x}_{k+3} - \vec{x}_{i\,k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2} = q_k, \quad q_k' = p_{k\,j}, \tag{2.2}$$

где p_k — полином по t степени не более чем $2k-1$, q_k — полином по t степени не более чем $2k$.

Дифференцирование (2.1) по t совместно с (2.2) дает систему линейных уравнений для определения координат вектора $\vec{x}_{i\,k+1}$:

$$\begin{gathered}\vec{x}_{k+2}^2\vec{x}_{i\,k+1} = p_k'\vec{x}_{k+2} - q_k O\vec{x}_{k+2} - p_k\vec{x}_{k+3} + \\ +(\vec{x}_{i\,k} \cdot O\vec{x}_{k+2})O\vec{x}_{k+3}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Из цепочки равенств (2.3) следует линейное векторное уравнение для $\vec{x}_{k+3}$:

$$\begin{gathered}(p_k\vec{x}_{k+1}^2 - p_{k-1}\vec{x}_{k+2}^2)\vec{x}_{k+3} + \\ +(q_{k-1}\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ -p_{k-1}'\vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2})O\vec{x}_{k+3} = \\ = (p_k'\vec{x}_{k+1}^2 + (2p_k - p_{k-1}'')\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - \\ -q_{k-1}'\vec{x}_{k+1} \cdot O\vec{x}_{k+2})\vec{x}_{k+2} + \\ +((p_{k-1}'' - 2p_k)\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1} + \\ +q_{k-1}'\vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} - q_k\vec{x}_{k+1}^2))O\vec{x}_{k+2}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

3. Уравнения на полиномы

Цепочку уравнений (2.1), (2.2) на полиномы p_k, q_k можно дополнить новыми уравнениями. Из (2.4) находится $\vec{x}_{k+3}$ и подставляется в (2.4), при этом сокращаются производные по t и остается цепочка уравнений, связывающая p_k, q_k:

$$\begin{gathered}p_{k+1}(4p_kp_{k-1} - p_{k-1}' - q_{k-1}^2) - \\ -p_{k-1}(p_k'^2 + q_k^2) + (p_k'p_{k-1}' - q_kq_{k-1}) \times \\ \times(p_{k-1}'' - 2p_k) - p_k(p_{k-1}'' - 2p_k)^2 + \\ +q_{k-1}'(p_k'q_{k-1} + q_kp_{k-1}' - p_kq_{k-1}') = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Если все коэффициенты в линейном уравнении (2.4) равны нулю, то следуют две цепочки равенств:

$$\begin{gathered}4p_{k-1}p_k = p_{k-1}'^2 + q_{k-1}^2, \\ 2(q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1}) = q_{k-1}'p_{k-1}' - p_{k-1}''q_{k-1}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Теорема 2. Цепочка уравнений (2.1), (2.2), (3.1) для величин p_k, q_k имеет решение, зависящее только от i:

$$\begin{gathered}4p_{k+1}p_kp_{k-1} - p_{k+1}q_{k-1}^2 = \\ = -2p_kq_kq_{k-1} + 4p_k^3 + q_k^2p_{k-1}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Цепочка уравнений (2.1), (2.2), (3.2) имеет решение

$$\begin{gathered}p_k = -4^{-k}q^{2k}, \quad q_k = 4^{-k}q^{2k+1}, \\ p_0 = -1, \quad q_0 = q(i),\end{gathered} \tag{3.4}$$

которое является частным решением цепочки (3.3).

Теорема 3. Цепочка (2.4) в силу (2.3) сводится к цепочке линейных векторных равенств:

$$\begin{gathered}\vec{x}_{k+3}(4p_kp_{k-1} - q_{k-1}^2) + 2(p_kq_{k-1} - q_kp_{k-1}) \times \\ \times O\vec{x}_{k+2} + (4p_k^2 - q_kq_{k-1})\vec{x}_{k+1} = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

4. Представления решений

При выводе формул (2.3), (2.4), (3.3), (3.4) предполагалось $\vec{x}_{k+2}^2 \neq 0$. Значит одно из представлений решения векторной системы (1.1) есть полином по переменной t степени n:

$$\vec{x} = \vec{P}_n(t) = t^n\vec{D}_n + ... + \vec{D}_0, \quad \vec{D}_k = \vec{D}_k(i,j). \tag{4.1}$$

В случае нулевых коэффициентов линейного уравнения (2.4) в силу (3.4) получаются равенства

$$\begin{gathered}q^2\vec{x}_{k+1}^2 = 4\vec{x}_{k+2}^2, \quad \vec{x}_{k+1} \cdot \vec{x}_{k+2} = 0, \\ q\vec{x}_{k+1}^2 = 2\vec{x}_{k+2} \cdot O\vec{x}_{k+1}.\end{gathered}$$

Отсюда следует равенство $2\vec{x}_{k+2} = qO\vec{x}_{k+1}$. Дифференцирование по t дает линейное уравнение

$$4\vec{x}_{k+3} + q^2\vec{x}_{k+1} = 0,$$

решение которого дает гармоническое представление

$$\vec{x}=\vec{P}_n(t)+\vec{C}_1(i,j)\cos(\alpha t)+\vec{C}_2(i,j)\sin(\alpha t),\quad 2\alpha=q(i). \tag{4.2}$$

Теорема 4. Если матрица коэффициентов цепочки (3.5) имеет ранг 2, то решение имеет представление (4.2). Если матрица коэффициентов цепочки (3.5) имеет ранг 1, то решения цепочки имеет только следующие представления:
бигармоническое

$$\vec{x}=\vec{P}_n+\vec{C}_1\cos(\lambda t)+\vec{C}_2\sin(\lambda t)+ +\vec{C}_3\cos(\mu t)+\vec{C}_4\sin(\mu t), \tag{4.3}$$

экспоненциально растущих гармоник

$$\vec{x}=\vec{P}_n(t)+(\vec{C}_1\exp(t\delta)+ +\vec{C}_2\exp(-t\delta))\sin(\lambda t)+ +(\vec{C}_3\exp(t\delta)+\vec{C}_4\exp(-t\delta))\cos(\lambda t), \tag{4.4}$$

линейно растущих гармоник

$$\vec{x}=\vec{P}_n(t)+(\vec{C}_1t+\vec{C}_2)\sin(\lambda t)+ +(\vec{C}_3t+\vec{C}_4)\cos(\lambda t). \tag{4.5}$$

Здесь $\vec{C}_l$ — функции переменных i, j; λ, δ, μ — функции переменной i.

5. Заключение

Все представления (4.1)–(4.5) дают решения системы (1.1), которые записываются с точностью до преобразований из группы G:

$$\vec{x}=(t^2-2^{-1}i)\vec{e}_0+(t\alpha(i)+2j)O\vec{e}_0,$$

где $\vec{e}_0$ — единичный постоянный вектор; $\alpha(i)$ — произвольная функция;

$$\vec{x}=(t^3-2j)\vec{e}_0+(t^2+6tj-2^{-1}i)O\vec{e}_0;$$

$$\vec{x}=\beta(i)\vec{e}(j\alpha^2+t\alpha),\quad \alpha^2\beta\beta'=1,\quad \vec{e}^2(s)=1;$$

$$\vec{x}=(t^2+2\ln|\delta|)\vec{e}_0+2jO\vec{e}_0+\delta(i)\vec{e}(t+j),\ 2i=\delta^2-8\ln|\delta|;$$

$$\vec{x}=\vec{e}(j-t)(1+A\mathrm{tg}\varphi)+O\vec{e}(j-t)(t-2j+A),$$

где $A\neq 0$ — постоянная, $2i=6A\mathrm{tg}\varphi+A^2(1+\mathrm{tg}^2\varphi)$;

$$\vec{x}=(t-2j)O\vec{e}(j-t)+(m(i)+1)\vec{e}(j-t),\quad 2i=6m+m^2;$$

$$\vec{x}=\nu O\vec{e}(\lambda^2j+\lambda t)+N|\nu|^{-\lambda^{-2}}O\vec{e}(j+\varphi\pm t);\quad 2i=\lambda^2\nu^2+N^2|\nu|^{-2\lambda^{-2}},$$

где λ, φ, N — постоянные;

$$\vec{x}=e^{2j+t}O\vec{e}(t)-2^{-1}i\cos^{-1}\varphi e^{-2j-t}\vec{e}(t+\varphi).$$

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: ИКТ, 2003. 336 с.

[2] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.