



О собственных крутильных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой¹

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследуются собственные крутильные колебания ступенчатого стержня с присоединенной распределенной массой. Показано, что увеличение координаты ступени приводит к возрастанию собственных частот колебаний в рассматриваемом диапазоне параметров. Получено, что с возрастанием отношения полярных моментов инерции ступеней две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются. С возрастанием интенсивности присоединенной распределенной массы низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня также уменьшаются. Решение обратной задачи позволяет определить по трем низшим частотам свободных крутильных колебаний ступенчатого стержня координату ступени, отношение полярных моментов инерции ступеней и интенсивность присоединенной распределенной массы.

1. Введение

В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот продольных колебаний [1–8], крутильных колебаний [9–11] или изменение частоты собственных изгибных колебаний [12–13]. В [1] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется как продольная пружина с жесткостью и для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружиной с жесткостью. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных, крутильных и изгибных установившихся волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [2, 4–13]. Метод конечных элементов используется для анализа изгибных колебаний невращающегося ротора с открытыми трещинами в [14]. В [15] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположе-

ние, но и степень поврежденности. В [16] рассматриваются собственные изгибные колебания ступенчатой консольной балки с прикрепленной распределенной массой.

2. Постановка задачи

Здесь рассматриваются собственные крутильные колебания ступенчатого стержня с присоединенной распределенной массой интенсивности m_l на втором участке. Стержень закреплен верхним и нижним концами на упругих опорах с жесткостью на кручение c_{1x} и c_{2x} и соединен по концам с дисками с моментами инерции J_1 и J_2 (рис. 1). Задача состоит в определении координаты ступени, отношения полярных моментов инерции поперечных сечений ступеней и интенсивности распределенной массы в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L длину; J_p — полярный момент инерции стержня круглого поперечного сечения на первом участке; G, ρ — модуль сдвига и плотность; j_p — полярный момент инерции стержня круглого поперечного сечения на втором участке; x_c — координату ступени; ϕ, M — угол поворота и крутящий момент в сечении стержня. Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость

$$M = GJ_p\theta, \quad \theta = \frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00293_а).

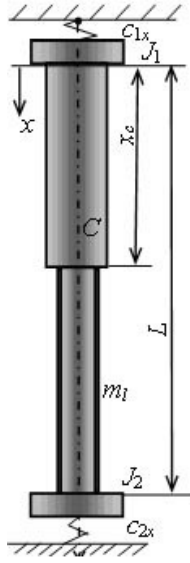


Рис. 1. Расчетная схема

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq L$ индексами «1», «2», соответственно, для этих участков имеем

$$\begin{aligned} GJ_p \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ Gj_p \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} - (\rho j_p + m_l r^2) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{2j_p}{\pi}}.$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} M &= c_{1x} \phi_1 + J_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} (x=0), \\ M &= -c_{2x} \phi_2 - J_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} (x=L). \end{aligned} \quad (2)$$

В пределах ступени и вблизи нее имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [17], но принимаем гипотезу плоских сечений. Условия стыкования решений при $x = x_c$ (условия равенства крутящих моментов и углов поворота), причем, для стержня с круглым сечением:

$$\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi R^4}{2}, \quad j_p \leq J_p, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= m_p^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad \phi_1 = \phi_2, \quad (x = x_c), \quad m_p^2 = \frac{j_p}{J_p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Частное решение задачи (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi_i &= (A_i \cos \alpha_i x + B_i \sin \alpha_i x) \sin \omega_i t \quad (\alpha_i = \omega_i / a_i), \\ \alpha_1 &= \omega_t / a_1 = \omega_t \sqrt{\rho / G}, \quad a_1 = \sqrt{G / \rho}, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \sqrt{1 + \frac{m}{m_p}}, \quad m = \frac{m_l}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\pi J_p}}. \end{aligned}$$

Четыре константы в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq L$, определяются из четырех граничных условий (2)–(3). Для того чтобы A_i , B_i ($i = 1 \div 2$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (4)$$

где его ненулевые элементы записываются в виде:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{1x} - J_1 \omega_t^2, \quad a_{12} = -GJ_p \alpha_1, \\ a_{23} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \cos(\alpha_2 L) + Gj_p \alpha_2 \sin(\alpha_2 L), \\ a_{24} &= (-c_{2x} + J_2 \omega_t^2) \sin(\alpha_2 L) - Gj_p \alpha_2 \cos(\alpha_2 L), \\ a_{31} &= \alpha_1 \sin(\alpha_1 x_c), \quad a_{32} = -\alpha_1 \cos(\alpha_1 x_c), \\ a_{33} &= -m_p^2 \alpha_2 \sin(\alpha_2 x_c), \quad a_{34} = m_p^2 \alpha_2 \cos(\alpha_2 x_c), \\ a_{41} &= \cos(\alpha_1 x_c), \quad a_{42} = \sin(\alpha_1 x_c), \\ a_{43} &= -\cos(\alpha_2 x_c), \quad a_{44} = -\sin(\alpha_2 x_c). \end{aligned}$$

Частотное уравнение здесь не приводится из-за его громоздкости. Если частное решение представить в амплитудной форме $\phi_i = C_i \sin(\alpha_i x + \delta_i) \sin \omega_i t$, то частотное уравнение после исключения четырех констант C_i , δ_i ($i = 1 \div 2$) записывается

$$\begin{aligned} m_p^2 \operatorname{tg} \left(\alpha_1 x_c + \operatorname{arctg} \frac{GJ_p \alpha_1}{c_{1x} - J_1 \omega_t^2} \right) &= \\ = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{tg} \left(\alpha_2 x_c + \operatorname{arctg} \frac{Gj_p \alpha_2}{-c_{2x} + J_2 \omega_t^2} - \alpha_2 L \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Когда коэффициенты жесткости c_{1x} , c_{2x} равны нулю или стремятся к бесконечности, тогда частотное уравнение упрощается.

Для стержня без ступени и распределенной массы m_l из частотного уравнения следует, что $\cos \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [2] $\alpha L = (2k - 1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) или $\omega_{tk} = (2k - 1)\pi a_1 / 2L$.

Для определения координаты ступени x_c , параметра m_p и интенсивности распределенной массы m_l необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний стержня со ступенью и присоединенной распределенной массой. Таким образом, в приведенной простейшей модели фигурируют координата ступени x_c , параметр m_p и интенсивность распределенной массы m_l . В прямой задаче координата ступени x_c , параметр m_p и интенсивность распределенной массы m_l известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

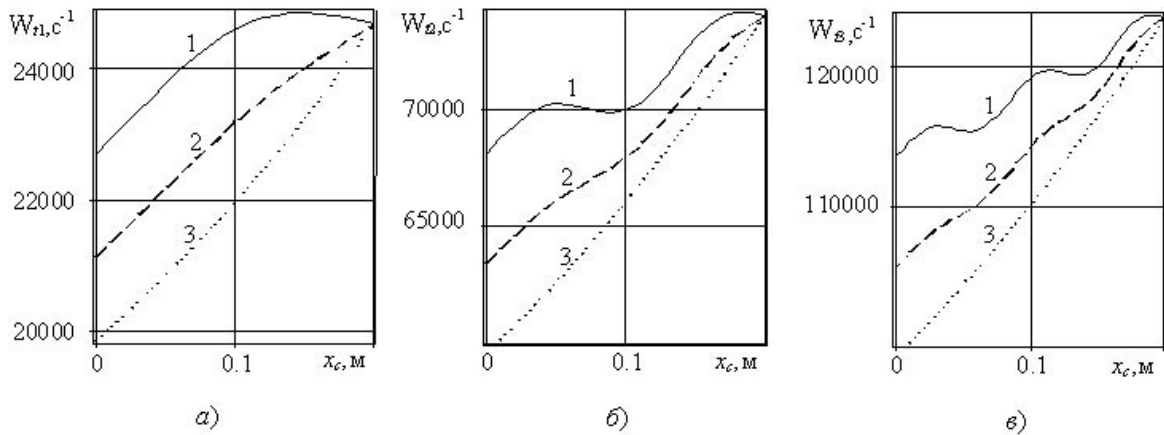


Рис. 2. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от координаты ступени x_c для параметра $m_p = 0.9$ и различных m_l (кривая 1 — 0.05, 2 — 0.10, 3 — 0.15 кг/м)

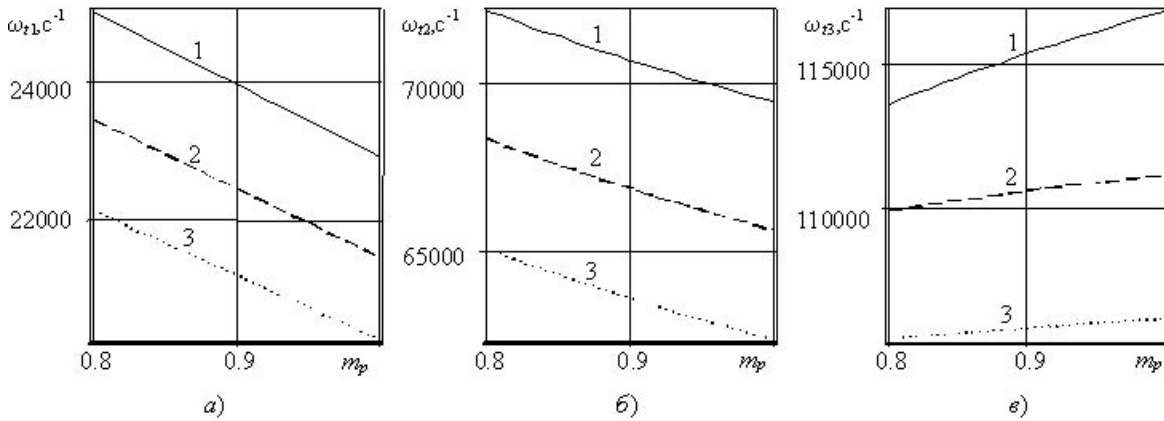


Рис. 3. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от параметра m_p для координаты ступени $x_c = 0.05$ м и различных m_l (кривая 1 — 0.05, 2 — 0.10, 3 — 0.15 кг/м)

3. Прямая задача

Решение уравнения (5) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $a = 3141.9$ м/с, $L = 0.2$ м, $R = 0.005$ м, $J_1 = J_2 = 0$, $c_1 \rightarrow \infty$, $c_2 = 0$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без ступени $\omega_{t1} = 24676.74894$ 1/с, $\omega_{t2} = 74030.24683$ 1/с, $\omega_{t3} = 123383.7447$ 1/с. Для стержня со ступенью при $x_c = 0.02$ м, $m_l = 0.05$ кг/м, $m_p = 0.9$ решение прямой задачи дает, что круговые частоты крутильных колебаний стержня $\omega_{t1} = 23140.20204$ 1/с, $\omega_{t2} = 69347.40557$ 1/с, $\omega_{t3} = 115347.6563$ 1/с. На рис. 2 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от координаты ступени x_c для параметра $m_p = 0.9$ и различных m_l (кривая 1 — 0.05, 2 — 0.10, 3 — 0.15 кг/м). Увеличение координаты ступени

приводит к возрастанию собственных частот колебаний в рассматриваемом диапазоне параметров. На рис. 3 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от параметра m_p для координаты ступени $x_c = 0.05$ м и различных m_l (кривая 1 — 0.05, 2 — 0.10, 3 — 0.15 кг/м). С возрастанием параметра m_p две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются. На рис. 4 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от интенсивности m_l присоединенной распределенной массы для координаты ступени $x_c = 0.05$ м и различных m_p (кривая 1 — 0.8, 2 — 0.9, 3 — 1.0). С возрастанием интенсивности m_l присоединенной распределенной массы низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня также уменьшаются.

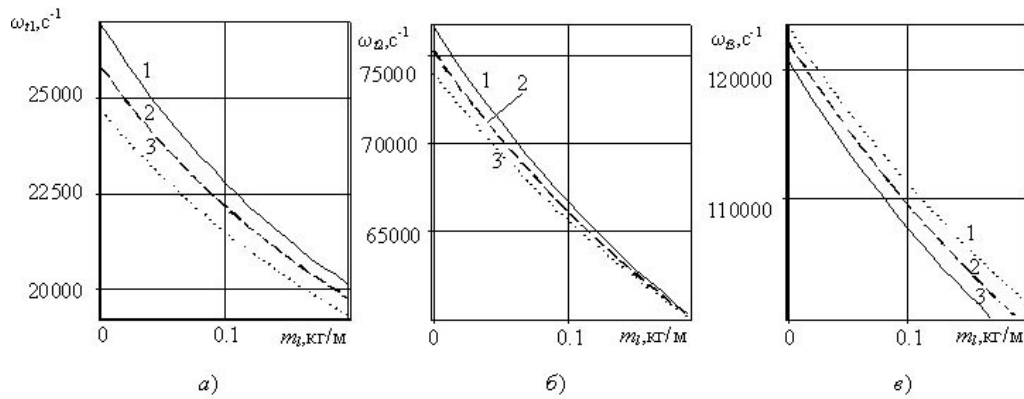


Рис. 4. Зависимости круговых частот крутильных колебаний стержня ω_{t1} (фрагмент а), ω_{t2} (фрагмент б), ω_{t3} (фрагмент в) от интенсивности m_l присоединенной распределенной массы для координаты ступени $x_c = 0.05$ м и различных m_p (кривая 1 — 0.8, 2 — 0.9, 3 — 1.0)

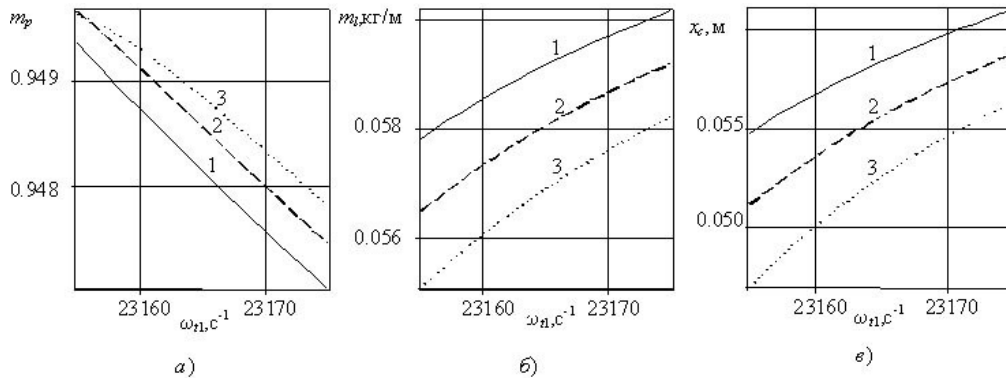


Рис. 5. Зависимости параметра m_p (фрагмент а), интенсивности присоединенной распределенной массы m_l (фрагмент б), координаты ступени x_c (фрагмент в) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{t1} , для $\omega_{t2} = 69320$ 1/с (кривая 1), $\omega_{t2} = 69330$ 1/с (кривая 2), $\omega_{t2} = 69340$ 1/с (кривая 3) при $\omega_{t3} = 115350$ 1/с

4. Обратная задача

Если частотное уравнение записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата ступени x_c , параметр m_p и интенсивность m_l присоединенной распределенной массы. Например, для круговых частот крутильных колебаний стержня $\omega_{t1} = 23150$ 1/с, $\omega_{t2} = 69350$ 1/с, $\omega_{t3} = 115350$ 1/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет ступень при $x_c = 0.036$ м, параметр $m_p = 0.947$ и интенсивность присоединенной распределенной массы $m_l = 0.052$ кг/м.

На рис. 5 приводятся зависимости параметра m_p (фрагмент а), интенсивности присоединенной распределенной массы m_l (фрагмент б), координаты ступени x_c (фрагмент в) от круговой частоты крутильных колебаний стержня ω_{t1} , для $\omega_{t2} = 69320$ 1/с (кривая 1), $\omega_{t2} = 69330$ 1/с (кривая 2), $\omega_{t2} = 69340$ 1/с (кривая 3) при $\omega_{t3} = 115350$ 1/с.

В этой модельной задаче предполагается, что

присоединенная масса равномерно распределена на поверхности стержня. Присоединенная масса может моделировать равномерное покрытие с низким модулем сдвига или равномерную коррозию материала стержня.

Показано, что увеличение координаты ступени приводит к возрастанию собственных частот колебаний в рассматриваемом диапазоне параметров.

Получено, что с возрастанием отношения полярных моментов инерции ступеней две низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня уменьшаются.

С возрастанием интенсивности присоединенной распределенной массы низшие частоты собственных крутильных колебаний стержня также уменьшаются.

Решение обратной задачи позволяет определить по трем низшим частотам свободных крутильных колебаний ступенчатого стержня координату ступени, отношение полярных моментов инерции ступеней и интенсивность присоединенной распре-

деленной массы.

Список литературы

- [1] Gladwell G.M.L. *Inverse problems in vibration*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. С. 608.
- [2] Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем. 2007. С. 201–211.
- [3] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. С. 224.
- [4] Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
- [5] Хакимов А.Г. Диагностика повреждений вертикальной штанги на упругой подвеске // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2010. URL: <http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov1.pdf>.
- [6] Ilgamov M.A., Sultanov B.Z., Tazhitdinov A.N., Khakimov A.G. Damage diagnostics in a vertical bar hanged on the elastic suspender with concentrated mass / Abstracts. 10th European Conference on Non-Destructive Testing. Moscow. Part 1. М.: Publishing house Spektr, 2010. P. 345–347.
- [7] Khakimov A.G. Damage Diagnostics in a Vertical Rod with Concentrated Masses on the Elastic Suspender // International Journal of Mechanics and Applications. 2012. Vol. 2, № 5. P. 70–73.
- [8] Ахметвалиева Э.Н., Ахтямов А.М. Диагностика поперечного надреза вертикальной штанги // Контроль. Диагностика. 2012. № 8. С. 31–34.
- [9] Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. Т. 46, № 6. С. 93–98.
- [10] Сафина Г.Ф. Исследование по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. 2011. Т. 47, № 3. С. 51–65.
- [11] Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // ИВУЗ. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 71–73.
- [12] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Т. 45, № 6. С. 83–89.
- [13] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. С. 42–48.
- [14] Guangming Dong and Jin Chen. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2011. Vol. 28, №1. P. 171–182.
- [15] Акопьян В.А., Черпаков А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н. Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50–56.
- [16] Хакимов А.Г. О собственных изгибных колебаниях ступенчатой консольной балки с прикрепленной распределенной массой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 1. С. 57–64.
- [17] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 450 с.
- [18] Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллеспи Дж. Мл. О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 3. С. 39–46.