



Завихренный разлет одноатомного газа¹

Шаяхметова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматривается одно инвариантное решение на трехмерной подалгебре, допускаемой уравнениями газовой динамики для одноатомного газа. Оно задает растекание газа до вакуума. Движение частиц происходит по гиперболам, лежащим на эллиптическом конусе.

1. Введение

Уравнения газовой динамики для одноатомного газа допускают 14-мерную алгебру Ли. Характерная особенность этой алгебры заключается в том, что она содержит проективный оператор. Оптимальная система неподобных подалгебр содержит 1248 представителей [1]. Подалгебр с проективным оператором значительно меньше. Все они представлены в работе [2], где построен граф вложенных подалгебр. Важно представить движение одноатомного газа, отвечающее групповым решениям на подалгебрах с проективным оператором. Одна из таких подалгебр с номером 3.7 из оптимальной системы работы [2] дает инвариантные решения ранга 1, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений. Частное решение этой системы, найденное в [2], имеет вид:

$$u = \frac{tx}{1+t^2}, v = \frac{ty-az}{1+t^2}, w = \frac{tz+a^{-1}y}{1+t^2}, \quad (1)$$

$$\rho = \bar{\rho}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, p = \bar{p}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}, S = p\rho^{-\frac{5}{3}},$$

где $\vec{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты; t — время; $\vec{u} = (u, v, w)$ — скорость; p — давление; ρ — плотность; S — энтропия; $\bar{p}(\vec{x})$ — произвольная функция; $\bar{\rho} = -\bar{p}_{\vec{x}}\vec{x}^{-1}$; $\vec{x} = x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$; $a \geq 0$ — параметр подалгебры 3.7.

Решение будет физично, если p и ρ положительны, поэтому произвольная функция $\bar{p}(\vec{x})$ должна иметь график колоколообразной формы, например, $\bar{p} = e^{-\vec{x}^2}$, $\bar{\rho} = 2e^{-\vec{x}^2}$. В этом случае p и ρ положительны для любого x и t . И при $t \rightarrow \infty$

газ растекается до вакуума $p, \rho \rightarrow 0$. Температура определяется формулой $T = p\rho^{-1}R^{-1} = (2R)^{-1}(1+t^2)^{-1}(R - \text{газовая постоянная})$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Газ остывает. Движение газа — завихренное $\text{rot}\vec{u} = ((a+a^{-1})(1+t^2)^{-1}, 0, 0)$, при $t \rightarrow \infty$ завихренность стремится к нулю.

2. Движение частиц

Частица газа движется согласно уравнению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t). \quad (2)$$

Семейство интегральных кривых уравнения 2 есть мировые линии частиц в \mathbb{R}^4 . Проекция мировых линий в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ — траектории частиц. С формулами 1 уравнение 2 имеет интегралы

$$\begin{aligned} x &= x_0\sqrt{1+t^2}, \\ y &= -az_0t + y_0, \\ z &= a^{-1}y_0t + z_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_0, y_0, z_0 — постоянные — локальные лагранжевы координаты. Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен $J = (1+t^2)^{\frac{3}{2}} > 0$. Следовательно, мировые линии частиц не пересекаются. Значит, локальные лагранжевы координаты являются глобальными для всего \mathbb{R}^4 .

Формулы 3 задают кривые в \mathbb{R}^4 . Проекция кривых на плоскость (t, x) есть гипербола $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - t^2 = 1$ (рис. 1).

Проекции мировых линий в пространство (x, y, z) — кривые. Проекция этих кривых на плоскость (y, z) являются прямыми линиями с направляющим вектором $\vec{q} = (v, w) = (-az_0, a^{-1}y_0)$ и нор-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-97027-р_поволжье_а).

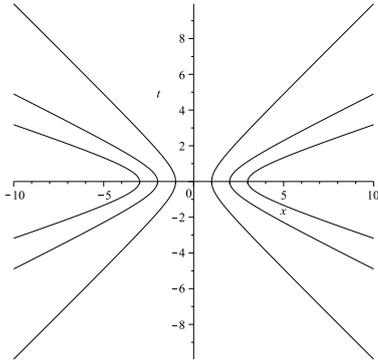


Рис. 1. Проекция мировых линий на плоскость (t, x) при $x_0 = 1, 2, 3$

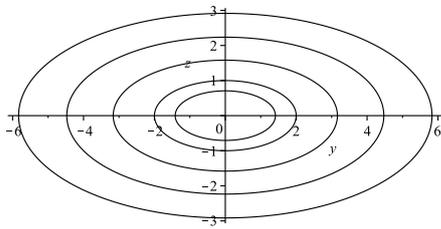


Рис. 2. Эллипсы 6 при $a = 2, k = 1, t = 0, 1, 2, 3, 4$

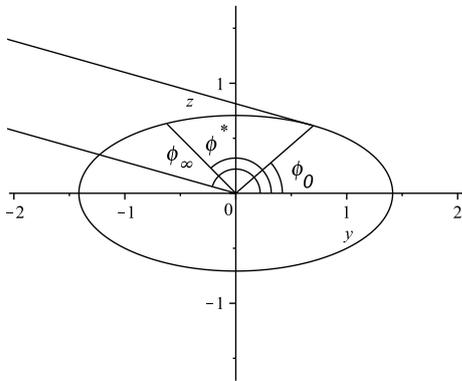


Рис. 3. Угол ϕ_0 принадлежит первой четверти

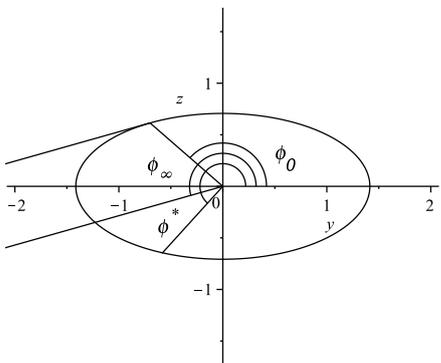


Рис. 4. Угол ϕ_0 принадлежит второй четверти

мальным вектором $\vec{n} = (a^{-1}y_0, az_0)$, длины этих векторов равны $q = |\vec{q}| = |\vec{n}| = \sqrt{a^2 z_0^2 + a^{-2} y_0^2}$.

Пусть точка (y_0, z_0) лежит на эллипсе

$$\frac{y_0^2}{a} + z_0^2 a = k^2 = \text{const}, k > 0. \quad (4)$$

В точке (y_0, z_0) эллипса его нормаль совпадает с \vec{n} . Значит, проекция движения частицы на плоскость (y, z) совпадает с касательной к эллипсу. Скорость проекции равна q и зависит от y_0, z_0 .

Для того чтобы найти местоположение точек эллипса (4) в момент t необходимо вычислить y_0, z_0 из равенств (3):

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{y + azt}{1 + t^2}, \\ z_0 &= \frac{z - a^{-1}yt}{1 + t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

и подставить 5 в 4: получается уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{a} + z^2 a = k^2(1 + t^2). \quad (6)$$

В разные моменты времени эллипсы 6 подобны (отношение полуосей постоянно)(рис. 2).

В начальный момент времени положение проекций частиц на эллипсе 4 определяется углом ϕ_0 : $\text{tg}\phi_0 = \frac{z_0}{y_0}$. А в любой другой момент времени положение этих же частиц на эллипсе 6 будет определяться углами ϕ :

$$\text{tg}\phi = \frac{z}{y} = \frac{a^{-1}y_0 t + z_0}{-az_0 t + y_0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\text{ctg}\phi_0}{a^2} = \text{tg}\phi_\infty.$$

Для определенности пусть $t > 0, a > 1$ и $\phi_0 + \frac{\pi}{2} = \phi^*$, тогда $-\text{ctg}\phi_0 = \text{tg}(\phi_0 + \frac{\pi}{2}) = \text{tg}\phi^*$ и $\text{tg}\phi_\infty = \frac{\text{tg}\phi^*}{a^2}$.

Если ϕ_0 принадлежит первой четверти плоскости (y, z) , то ϕ^* принадлежит второй четверти и $\text{tg}\phi^* < \frac{\text{tg}\phi^*}{a^2} = \text{tg}\phi_\infty < 0, \phi_\infty > \phi^* = \phi_0 + \frac{\pi}{2}$. Следовательно, проекция частицы изменит свое положение на эллипсе на угол более $\frac{\pi}{2}$ (рис. 3), при этом, чем больше a , тем больше этот угол. Также угол увеличится, если ϕ_0 принадлежит третьей четверти. Если ϕ_0 принадлежит второй или четвертой четверти, то проекция частицы изменит свое положение на эллипсе на угол менее $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4), при этом, чем больше a , тем меньше этот угол.

При $a = 1$ эллипс вырождается в окружность $y_0^2 + z_0^2 = k^2$, с которой проекции частиц движутся по касательным с одинаковыми скоростями

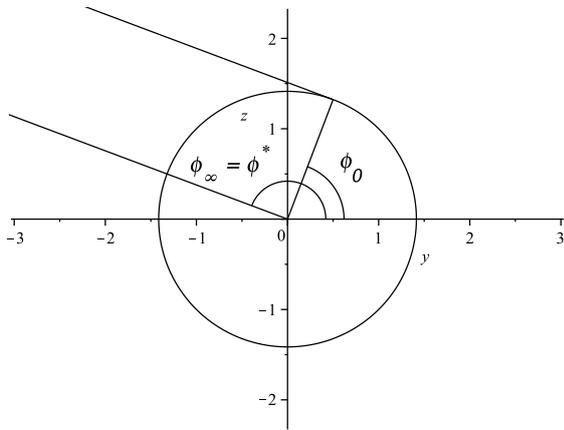


Рис. 5. Движение проекции частицы с окружности $y_0^2 + z_0^2 = 2$ при $a = 1$

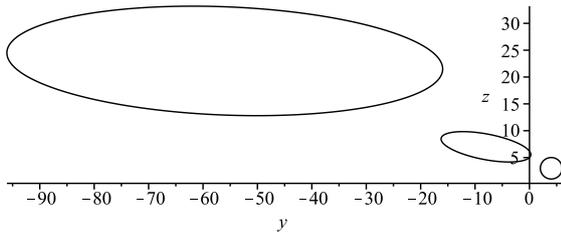


Рис. 6. Эллипс (8) при $t = 0, 2, 10$

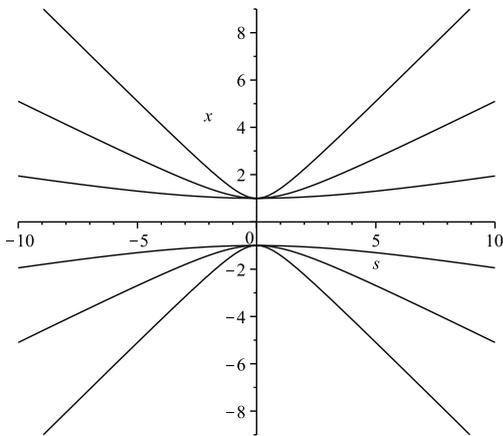


Рис. 7. Траектории частиц в плоскости (s, x) при $x_0 = 1, q = 1, 2, 6$

$q = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = k$ и в момент времени t находятся на окружности $y^2 + z^2 = k^2(1 + t^2)$. При этом $\text{tg}\phi \rightarrow \text{tg}\phi_\infty = -\text{ctg}\phi_0 = \text{tg}\phi^*$, т.е. проекции всех частиц поворачиваются на окружности на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 5).

Пусть точка (y_0, z_0) лежит на окружности с центром (y_c, z_c) и радиусом r_c :

$$(y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2 = r_c^2. \tag{7}$$

Из формул (5) и (7) следует, что в момент времени t проекция частицы будет находиться на эллипсе

$$y^2\left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right) + z^2(1 + a^2t^2) + \frac{2yzt}{a}(a^2 - 1) + 2y(1 + t^2)\left(\frac{t}{a}z_c - y_c\right) - 2z(1 + t^2) \times \tag{8}$$

$$\times (aty_c + z_c) = (1 + t^2)^2(r_c^2 - y_c^2 - z_c^2).$$

Перенос начала координат в центр эллипса (y^*, z^*) и поворот на угол α

$$y = y^* + \tilde{y} \cos \alpha - \tilde{z} \sin \alpha,$$

$$z = z^* + \tilde{y} \sin \alpha + \tilde{z} \cos \alpha,$$

где

$$y^* = y_c - atz_c, z^* = z_c + a^{-1}ty_c;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t(a^2 + 1)}{2\sqrt{t^2(a^2 + 1)^2 + 4a^2}}};$$

($\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $t \rightarrow \infty$), приводят уравнение (8) к виду

$$\left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{z}}{c}\right)^2 = 1,$$

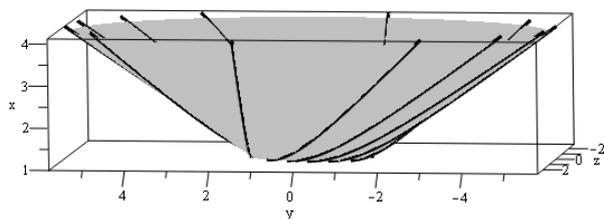
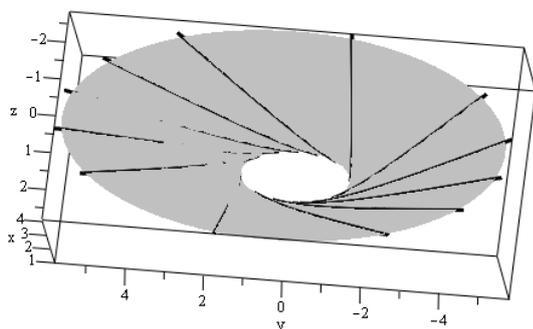
где

$$b, c = \frac{(1 + t^2)r_c}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{2a^2} + \frac{a^2t^2}{2} \pm \frac{t}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\sqrt{t^2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 4}}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ полуоси имеют асимптотическое поведение $b \sim \frac{tr_c}{a}, c \sim atr_c$.

На рис. 6 показано как будут расплываться проекции частиц, ограниченных окружностью (7), в рассматриваемом движении газа.

Пусть $s = tq$ — длина прямолинейного пути проекции частицы в плоскости (y, z) . В плоскости (s, x) траектория частицы есть гипербола $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{s}{q}\right)^2 = 1$ (рис. 7).

Рис. 8. Движение частиц при $t=0 \dots 4$ (вид сбоку)Рис. 9. Движение частиц при $t=0 \dots 4$ (вид сверху)

Исключение параметра t из уравнений (6) и (3) дает уравнение конической поверхности:

$$\frac{x^2}{x_0^2} = \frac{y^2}{ak^2} + \frac{az^2}{k^2}.$$

Следовательно, траектории частиц, в начальный момент времени находящихся на эллипсе (4) при $x = x_0$, лежат на усеченном эллиптическом конусе.

Таким образом, решение (1) задает разлет частиц по гиперболам, лежащим на эллиптическом конусе (рис. 8, 9).

Список литературы

- [1] Черевко А.А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S) \rho^{5/3}$. Новосибирск: Препринт 4-96, РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики, 1996.
- [2] Шаяхметова Р.Ф. Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа. Сибирские электронные математические известия. Т. 11. 2014. С. 605–625.