Институт механики
им. Р.Р.Мавлютова
Уфимского научного центра РАН

УДК 532.5.013

Инвариантные подмодели ранга 2 с вращением для уравнений газовой динамики[1]

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассмотрены всевозможные инвариантные подмодели ранга 2, допускающие оператор вращения, для уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния. Показано, что такие подмодели сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

1. Введение

Рассматриваются инвариантные подмодели ранга 2 с произвольным уравнением состояния. А именно, подмодели 2.8, 2.9, 2.10 [1], допускающие оператор вращения.

2. Инвариантная подмодель 2.8

В инвариантной подмодели 2.8 неизвестные функции ищем в виде:

$$U = \frac{x}{t} + U(t,r), \quad V = V(t,r), \quad W = W(t,r),$$

$$p = p(t,r), \quad \rho = \rho(t,r),$$

где U, V, W — компоненты вектора скорости; x, t, r, θ —- независимые переменные; p — давление; ρ — плотность. Тогда подмодель 2.8 приводится к системе эволюционного типа:

$$\begin{gathered} U_t + VU_r + \frac{U}{t} = 0, \\ V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r}, \\ W_t + VW_r + \frac{VW}{r} = 0, \\ \rho_t + V\rho_r + \rho\left(\frac{1}{t} + V_r + \frac{V}{r}\right) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$p_t + Vp_r + \rho a^2\left(\frac{1}{t} + V_r + \frac{V}{r}\right) = 0 \quad \text{или} \quad S_t + VS_r = 0,$$

где $a^2 = f_\rho$, функции ρ, S, p связаны между собой уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Систему (1) можно записать в виде:

$$(tU)_t + V(tU)_r = 0, \quad V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r},$$

$$(rW)_t + V(rW)_r = 0, \; (tr\rho)_t + (trV\rho)_r = 0,$$

$$S_t + VS_r = 0.$$

Введем лагранжеву координату $\xi = \xi(t,r)$ по правилу $\xi_t + V\xi_r = 0$ с точностью до выбора функции $\xi = \kappa(\xi)$. Получим решения:

$$U = \frac{k(\xi)}{t}, \; W = \frac{g(\xi)}{r}, \; \rho = \frac{\psi'(\xi)\xi_r}{tr}, \; V = -\frac{\xi_t}{\xi_r},$$

$$S = S(\xi), \quad p = f(\rho, S),$$

где k, g, ψ, S — произвольные функции. Найденные функции подставляем во второе уравнение системы (1). Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r + \frac{1}{\psi'}\left(f_\rho\left(\psi''\xi_r + \psi'\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{\psi'}{r}\right) + rtf_S S'\right) = \frac{g^2(\xi)}{r^3}.$$

3. Инвариантная подмодель 2.9

В подмодели 2.8 неизвестные функции ищем в виде:

$$U = \beta\theta + U(t,r), \quad V = V(t,r), \quad W = W(t,r),$$

$$p = p(t,r), \quad \rho = \rho(t,r),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-97027-р_поволжье_а.)

где β — произвольная постоянная.

Тогда подмодель 2.9 приводится к системе эволюционного типа:

$$
\begin{aligned}
&U_t + VU_r + \frac{\beta W}{r} = 0,\\
&V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r},\\
&W_t + VW_r + \frac{VW}{r} = 0,\\
&\rho_t + V\rho_r + \rho\left(V_r + \frac{V}{r}\right) = 0,\\
&p_t + Vp_r + \rho a^2\left(V_r + \frac{V}{r}\right) = 0 \text{ или } S_t + VS_r = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Функции ρ, S, p связаны между собой уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Первое уравнение системы (2) отщепляется, то есть может быть решено после нахождения остальных неизвестных функций. Систему (2) можно записать в виде:

$$
V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r}, (rW)_t + V(rW)_r = 0,
$$
$$
(r\rho)_t + (rV\rho)_r = 0, \quad S_t + VS_r = 0.
$$

Аналогично п. 2 введем лагранжеву переменную ξ. Получим решение:

$$
S = S(\xi),\ W = \frac{g(\xi)}{r},\ \rho = \frac{\psi'\xi_r}{r},\ V = -\frac{\xi_t}{\xi_r},
$$
$$
tU = g(\xi)\int \frac{dt}{r(t,\xi)} + U_1(\xi), \quad p = f(\rho, S),
$$

где $r(t,\xi)$ — функция, выраженная из равенства $\xi = \xi(t,r)$; U_1 — произвольная функция.

Найденные функции подставляем во второе уравнение системы (2). Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$
-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r +
$$
$$
+\frac{1}{\psi'}\left(f_\rho\left(\psi''\xi_r + \psi'\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{\psi'}{r}\right) + rf_S S'\right) = \frac{g^2(\xi)}{r^3}.
$$

4. Инвариантная подмодель 2.10

В подмодели 2.10 неизвестные функции ищем в виде:

$$
U = \frac{x-\theta}{t} + U(t,r), \quad V = V(t,r), \quad W = W(t,r),
$$
$$
p = p(t,r), \quad \rho = \rho(t,r).
$$

Тогда подмодель 2.8 приводится к системе эволюционного типа:

$$
\begin{aligned}
&U_t + \frac{U}{t} + VU_r = \frac{W}{tr},\\
&V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r},\\
&W_t + VW_r + \frac{VW}{r} = 0,\\
&\rho_t + V\rho_r + \rho\left(\frac{1}{t} + V_r + \frac{V}{r}\right) = 0,\\
&p_t + Vp_r + \rho a^2\left(\frac{1}{t} + V_r + \frac{V}{r}\right) = 0 \text{ или } S_t + VS_r = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Функции ρ, S, p связаны между собой уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Первое уравнение системы (3) отщепляется. Остальные уравнения перепишем в виде:

$$
V_t + VV_r + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r}, \quad (rW)_t + V(rW)_r = 0,
$$
$$
(tr\rho)_t + (trV\rho)_r = 0, \quad S_t + VS_r = 0.
$$

Аналогично п. 2 введем лагранжеву переменную ξ. Получим решение:

$$
S = S(\xi),\ W = \frac{g(\xi)}{r},\ \rho = \frac{\psi'\xi_r}{tr},\ V = -\frac{\xi_t}{\xi_r},
$$
$$
tU = g(\xi)\int \frac{dt}{r(t,\xi)} + U_1(\xi), \quad p = f(\rho, S).
$$

Найденные функции подставляем во второе уравнение системы (3). Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$
-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r +
$$
$$
+\frac{1}{\psi'}\left(f_\rho\left(\psi''\xi_r + \psi'\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{\psi'}{r}\right) + rtf_S S'\right) = \frac{g^2(\xi)}{r^3}.
$$

5. Заключение

Таким образом, показано, что перечисленные инвариантные подмодели сводятся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Список литературы

[1] Мамонтов Е.В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.