

Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний¹

Утяшев И.М., Ахтямов А.М.

Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

В работе рассматриваются прямая и обратная задачи о колебании струны с учетом симметричных характеристик внешней среды. В частности, предложен модифицированный метод нахождения собственных частот с помощью степенных рядов, а также решена задача идентификации вида и параметров краевых условий для краевой задачи, описывающей колебания струны. Показано, что в случае симметричного потенциала $q(x)$, для идентификации как вида, так и параметров краевых условий, достаточно двух собственных частот. Проведена оценка сходимости предложенных методов.

Ключевые слова: спектральная задача, идентификация закрепления, струна, условие Плюккера, собственные значения

1. Введение

Рассмотрим задачу восстановления вида и параметров краевых условий для краевой задачи о колебаниях струны. В качестве данных восстановления используются две собственные частоты. Ранее в такой постановке задача не рассматривалась. Решалась задача идентификации параметров краевых условий Штурма по двум собственным частотам [1]. Однако, в работе [1] вид краевых условий был известен — это условия Штурма (условия вида $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0$). Восстанавливались лишь неизвестные параметры h и H , которые характеризуют жесткость закреплений на левом и правом концах струны. Аналогичные задачи рассматривались также в [2–8]. В работах [7–12] решались обратные спектральные задачи Штурма–Лиувилля. В этих работах коэффициенты краевых условий идентифицировались вместе с коэффициентами дифференциальных уравнений. Причем в качестве данных восстановления в этих работах использовались не две собственные частоты, как в настоящей работе, а несколько спектров,

или же спектр с дополнительными данными (функция Вейля, матрица Вейля, спектральная функция, весовые числа и т.п.). В [1, 13–15] решались близкие задачи идентификации вида закрепления стержней и пластин по нескольким собственным частотам. Однако, соответствующая задача идентификации общих краевых условий в задаче о колебаниях струны не рассматривалась.

В [10] краевые условия представлены в виде условий Штурма $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0$, где предполагается, что значения h и H могут принимать значения равные и бесконечности. Однако, при решении задачи идентификации общих краевых условий такой подход не всегда приводит к верным результатам.

Действительно, для спектральной задачи о колебаниях струны с жестко закрепленными концами $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, первые собственные значения λ_1 и λ_2 равны π и 2π соответственно. Предположим, что вид краевых условий неизвестен, требуется по двум собственным значениям определить их. Рассмотрим данную задачу, подразумевая, что краевые условия имеют вид Штурма. Подставив собственные значения в характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \lambda \sin(\lambda) - h \cos(\lambda) - H \cos(\lambda) - \frac{hH \sin(\lambda)}{\lambda},$$

получаем систему из двух уравнений с двумя неиз-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 16-31-00077-мол_а, 14-01-97010-р_поволжье_а, 14-01-97013-р_поволжье_а, 14-01-00740-а) и АН РБ (договор № 40/9-П).

вестными: $h + H = 0$, $-h - H = 0$. Отсюда следует, что $h = -H$, т.е. система имеет бесконечное множество решений. Если исходить из физических соображений (h, H относительные жесткости пружинок упругих закреплений) и положить что $h \geq 0$ и $H \geq 0$, то следует что $h = H = 0$. Тогда полученное решение соответствует граничным условиям для струны со свободными концами $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$. Найти же второе решение — задачу $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ этот метод не позволяет.

Таким образом, если учитывать только условия Штурма, то получаем только одно решение, что является неверным. Поэтому требуются теорема о количестве решений и другой метод идентификации.

2. Постановка задачи

Постановка прямой и обратной задач выглядит следующим образом: рассматриваются колебания струны, описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad (1)$$

где $q(x)u$ — слагаемое, которое характеризует упругость среды, причем $q(x) \in C^\infty[0, l]$, $x \in \mathbf{R}$. С крайними условиями на левом и правом концах [16, 17]:

$$b_{11}u_x(0, t) - b_{12}u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$b_{23}u_x(l, t) + b_{24}u(l, t) = 0. \quad (3)$$

где коэффициенты $b_{ij} \geq 0$. В табл. 1 представлены виды закреплений струны в зависимости от значений коэффициентов $b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}$.

Прямой задачей будем называть задачу определения собственных частот колебаний струны, если известны вид краевого условия и параметры $b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}$. А под обратной задачей будем понимать задачу идентификации вида краевых условий из табл. 1 и параметров $b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{24}$ по известным собственным частотам.

3. Решение прямой задачи на собственные значения

Сформулируем прямую и обратную задачи в терминах задачи Штурма–Лиувилля и характеристического определителя.

После замены $u(x, t) = y(x) \cos \omega t$ из (1) получим $-\omega^2 y(x) \cos \omega t = a^2 y''(x) \cos \omega t - q(x)y(x) \cos \omega t$. Отсюда, после введения новых обозначений $\xi = x/l$ и $\lambda^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2}$, получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = a_{11}y'(0) - a_{12}y(0) = 0, \quad (5)$$

$$U_2(y) = a_{23}y'(1) + a_{24}y(1) = 0, \quad (6)$$

где $a_{11} = b_{11}/l$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{23} = b_{23}/l$, $a_{24} = b_{24}$, а потенциал $q(x) \neq 0$ и симметричен $q(1-x) = q(x)$. В работе рассматривается случай, когда потенциал $q(x)$ симметричен.

Обозначим матрицу, состоящую из коэффициентов краевых условий a_{ij} форм $U_1(y), U_2(y)$, через A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты матрицы A можно считать неотрицательными. Матрицу A будем называть матрицей краевых условий.

Для решения задачи (4)–(6) будет применен модифицированный метод Л. Коллатца.

Общее решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

где y_1, y_2 — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (4). Линейно независимые функции y_1, y_2 будем строить в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (9)$$

где y_1 удовлетворяет условию

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (10)$$

а y_2 удовлетворяет

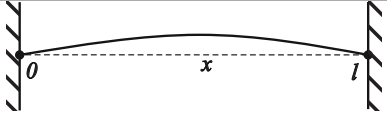
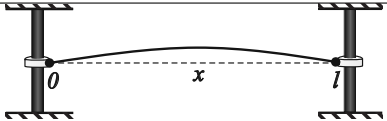
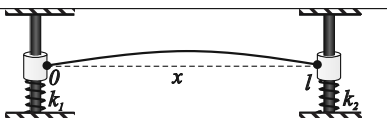
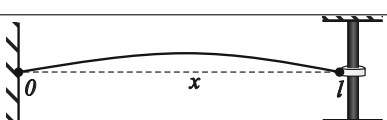
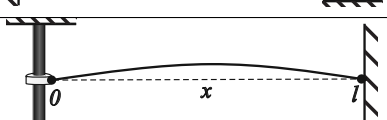
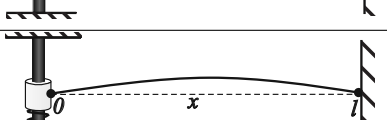
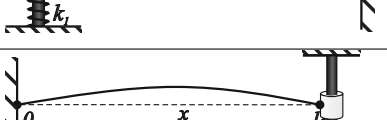
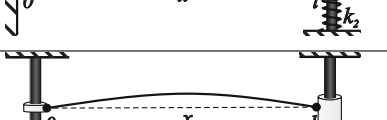
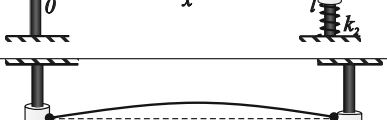
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (11)$$

Дополнительно предполагается что функция $q(x)$ аналитична всюду в области определения.

После подстановки ряда (9) в уравнение (4), и удовлетворив условиям (10)–(11), функции y_1, y_2 примут вид:

$$\begin{aligned} y_1 = & 1 - \frac{1}{2}\lambda x^2 - \frac{1}{6}q(0)\lambda x^3 + \\ & + \left(\frac{1}{24}\lambda^2 - \frac{1}{24}(q(0))^2\lambda - \frac{1}{12}q'(0)\lambda \right) x^4 \\ & + \left(\frac{1}{60}\lambda^2 q(0) - \frac{1}{120}(q(0))^3\lambda - \right. \\ & \left. - \frac{1}{24}q'(0)q(0)\lambda - \frac{1}{40}q''(0)\lambda \right) x^5 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Таблица 1. Виды краевых условий

Вид закрепления	Описание
	жесткое закрепление на обоих концах ($b_{11} = 0, b_{12} \neq 0, b_{23} = 0, b_{24} \neq 0$)
	свободные концы ($b_{11} \neq 0, b_{12} = 0, b_{23} \neq 0, b_{24} = 0$)
	упругое закрепление на обоих концах ($b_{11} \neq 0, b_{12} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{24} \neq 0$)
	жесткое закрепление на левом конце, свободный правый конец ($b_{11} = 0, b_{12} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{24} = 0$)
	жесткое закрепление на правом, свободное на левом концах ($b_{11} \neq 0, b_{12} = 0, b_{23} = 0, b_{24} \neq 0$)
	жесткое закрепление на правом конце, упругое на левом конце ($b_{11} \neq 0, b_{12} \neq 0, b_{23} = 0, b_{24} \neq 0$)
	жесткое закрепление на левом, упругое на правом конце при ($b_{11} = 0, b_{12} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{24} \neq 0$)
	свободное закрепление на левом конце, упругое на правом конце ($b_{11} \neq 0, b_{12} = 0, b_{23} \neq 0, b_{24} \neq 0$)
	свободное закрепление на правом, упругое на левом конце ($b_{11} \neq 0, b_{12} \neq 0, b_{23} \neq 0, b_{24} = 0$)

$$\begin{aligned}
 y_2 = & x + \frac{1}{2}q(0)x^2 + \left(\frac{1}{6}q(0)^2 + \frac{1}{6}q'(0) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{6}\lambda\right)x^3 + \left(-\frac{1}{12}q(0)\lambda + \frac{1}{24}q(0)^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8}q'(0)q(0) + \frac{1}{24}q''(0)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{40}q(0)^2\lambda + \right. \\
 & \left. \frac{1}{120}q(0)^4 + \frac{1}{20}q'(0)q(0)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{30}q''(0)q(0) + \frac{1}{40}q'(0)^2 - \frac{1}{30}q'(0)\lambda + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{120}q'''(0) + \frac{1}{120}\lambda^2\right)x^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

Используя сумму первых пяти слагаемых рядов (12)–(13), считая, что остаток достаточно мал, получаем приближенное решение вида (8). Для получения более точного решения число слагаемых ряда можно увеличить.

Чтобы найти константы C_1, C_2 воспользуемся краевыми условиями (5)–(6). Уравнения частот получают из условия существования ненулевого решения для C_1, C_2 . Ненулевое решение для констант $C_i, i = 1, 2$ существует тогда и только тогда, когда равен нулю характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} U_1(y_1(\lambda x)) & U_1(y_2(\lambda x)) \\ U_2(y_1(\lambda x)) & U_2(y_2(\lambda x)) \end{vmatrix} \tag{14}$$

соответствующей системы (см. [18]). Преобразуя (14), получим

$$\Delta(\lambda) = J_{13}f_{13}(\lambda) + J_{14}f_{14}(\lambda) + J_{23}f_{23}(\lambda) + J_{24}f_{24}(\lambda) = 0,$$

где через $J_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ обозначен определитель, составленный из i -го и j -го столбцов матрицы краевых условий A (обозначение J_{ij} взято из работы [9]). В частности, для матрицы (7) определители J_{ij} вычисляются по формулам: $J_{13} = a_{11}a_{23}$, $J_{14} = a_{11}a_{24}$, $J_{23} = a_{12}a_{23}$, $J_{24} = a_{12}a_{24}$. Коэффициенты f_{ij} вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 f_{13}(\lambda) &= y_1'(0)y_2'(1) - y_2'(0)y_1'(1), \\
 f_{14}(\lambda) &= y_1'(0)y_2(1) - y_2'(0)y_1(1), \\
 f_{23}(\lambda) &= y_2(0)y_1'(1) - y_1(0)y_2'(1), \\
 f_{24}(\lambda) &= y_2(0)y_1(1) - y_1(0)y_2(1).
 \end{aligned}$$

Причем y_1, y_2 являются целыми функциями по λ при каждом фиксированном x . Следует отметить, что в работе [19] доказана лемма, согласно которой в случае, когда потенциал $q(x)$ симметричен $q(1-x) = q(x)$, то $f_{14}(\lambda) = f_{23}(\lambda)$. Далее будем

рассматривать только симметричный случай и характеристический определитель вида:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda) &= J_{13}f_{13}(\lambda) + (J_{14} + J_{23})f_{14}(\lambda) + \\
 & J_{23}f_{23}(\lambda) + J_{24}f_{24}(\lambda) = 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

Предлагаемый метод отличается от предложенного Л. Коллатцом тем, что в работе [20] не строится фундаментальная система решений, а сразу ищется общее решение в виде ряда (9). Далее, подставив краевые условия, получают рекуррентные соотношения относительно a_n .

Рассмотрим пример нахождения собственных значений задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned}
 -y'' + 2xy' &= \lambda y, \\
 y(0) &= 0, \\
 y'(1) &= 0.
 \end{aligned}$$

После применения вышеуказанного метода, при 20 членах ряда (9), получены следующие результаты: $\lambda_1 = 3.59692, \lambda_2 = 23.51765$. Решение данной задачи приведено в работе [20], где получены следующие результаты: $\lambda_1 = 3.59692, \lambda_2 = 23.518$. Как видим, результаты хорошо согласуются.

3.1. Оценка метода нахождения собственных значений

Рассмотрим вопрос о сходимости метода по поиску собственных значений более подробно.

Исследуем зависимость погрешности от количества членов суммы ряда (9). Для оценки погрешности метода будет применен метод фильтрации численных результатов [21]. Перед применением метода опишем его суть.

Рассматривается зависимость погрешности вычисления некоторым численным методом некоторой величины z , которая представляется в виде суммы

$$z_n - z = c_1n^{-k_1} + c_2n^{-k_2} + \dots + c_Ln^{-k_L} + \Delta(n), \tag{16}$$

где z — точное значение; z_n — приближенный результат, полученный при числе слагаемых суммы, равным n ; k_L — произвольные известные действительные числа $k_1 < k_2 < \dots < k_L$.

Такую зависимость погрешности имеют многие методы численного дифференцирования, интегрирования и т.д. Если при решении задачи можно допустить возможность разложения функций по формуле Тейлора, то k_j — это часть ряда натуральных чисел. Тогда к задаче оценки предельного при $n \rightarrow \infty$ значения z можно подойти как к задаче интерполяции зависимости $z(x)$ от параметра

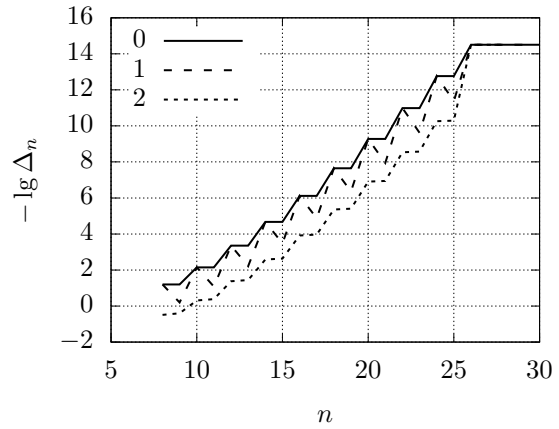
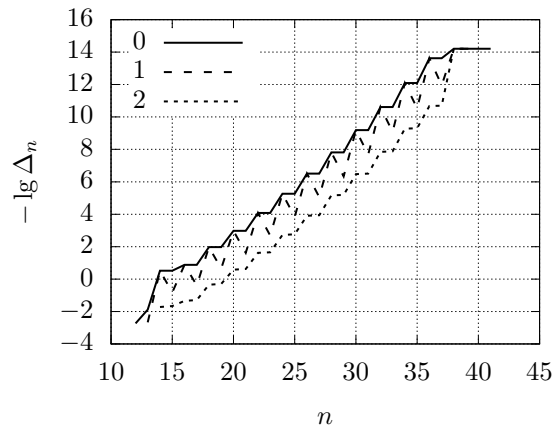
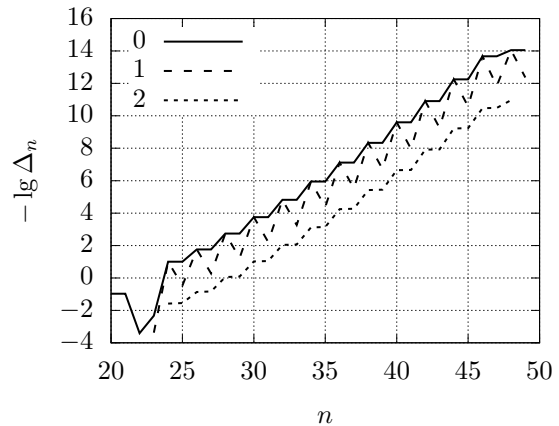
$x = 1/n$ алгебраическим многочленом с последующей экстраполяцией до $x = 0$ (см. стр. 34–36, метод Ромберга [21]). Есть и другой подход, приводящий к аналогичному алгоритму, но не требующий целочисленности k_j . Это решение задачи численной фильтрации, т.е. последовательное определение степенных слагаемых суммы (16) при неизменном значении константы z .

Рассмотрим фильтрацию при увеличении числа слагаемых суммы ряда на единицу. Пусть $k_i = i$ и имеется последовательность z_n , $n = 1, \dots, K$ вычисленных результатов, где n — число слагаемых суммы. Предполагается, что n на каждом шаге увеличивается на единицу, т.е. $n_i = n_{i-1} + 1$. Для этой последовательности можно применить формулу фильтрации Невилла:

$$z_n^{(L)} = z_n^{(L-1)} + \frac{n-L}{L} \left(z_n^{(L-1)} - z_{n-1}^{(L-1)} \right). \quad (17)$$

Проведем оценку погрешности приведенного выше метода нахождения собственных значений на примере задачи о свободных колебаниях струны с жестко закрепленными концами с нулевым потенциалом $q(x) \equiv 0$. Данная постановка выбрана не случайно, поскольку для этой задачи известны точные значения z собственных чисел λ_i , это π , 2π , $3\pi \dots$. Вычислив собственные значения при разных количествах слагаемых суммы ряда, получим последовательность z_n . Применяв процедуру фильтрации по формуле Невилла, получим результаты в виде графиков (см. рис. 1–3).

На рис. 1–3 показаны результаты после двух шагов фильтрации, где на оси абсцисс отложены n , на оси ординат десятичные логарифмы относительной погрешности $-\lg \Delta_n$. Через «0» обозначена кривая зависимости точности решения от количества слагаемых ряда, через «1» — кривая, полученная в результате первой фильтрации, а «2» — кривая после второй фильтрации. Как видно из рис. 1, для вычисления первого собственного значения λ_1 необходимо взять не менее 8 слагаемых суммы ряда. При числе слагаемых меньше 8 метод не дает решения. А при $n > 26$ погрешность становится меньше, чем 10^{-16} , и дальнейшее увеличение числа слагаемых не приводит к уточнению результатов. Для вычисления второго собственного значения λ_2 необходимо взять не менее 14 слагаемых суммы (см. рис. 2). При числе слагаемых меньше 14, метод не дает решения. А при $n > 38$ погрешность становится меньше, чем 10^{-16} , и дальнейшее увеличение числа слагаемых также не приводит к уточнению результатов. Для третьего собственного значения λ_2 (рис. 3) ситуация аналогична, за исключением того, что диапазон n от 24 до 50 слагаемых. Из вышесказанного следует что, чем больше порядковый

Рис. 1. Результат фильтрации вычисления λ_1 Рис. 2. Результат фильтрации вычисления λ_2 Рис. 3. Результат фильтрации вычисления λ_3

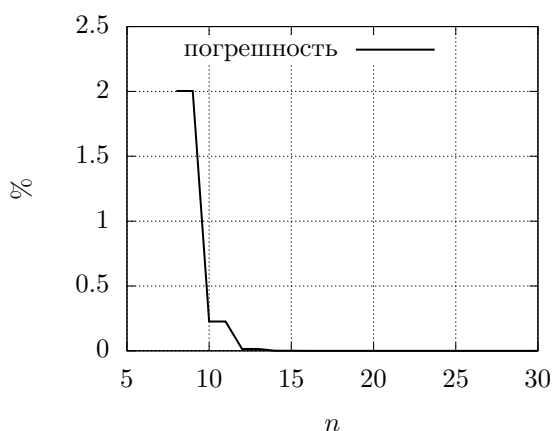


Рис. 4. График зависимости относительной погрешности вычисления λ_1 от суммы n слагаемых

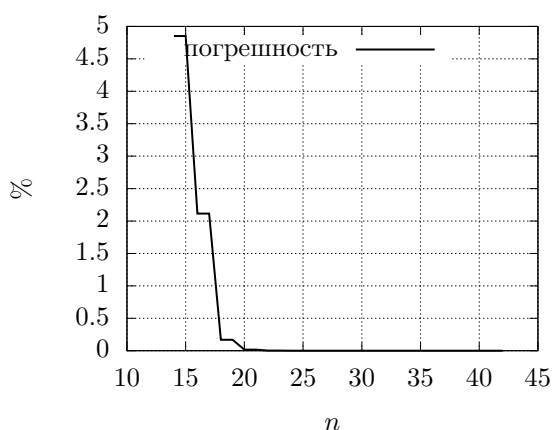


Рис. 5. График зависимости относительной погрешности вычисления λ_2 от суммы n слагаемых

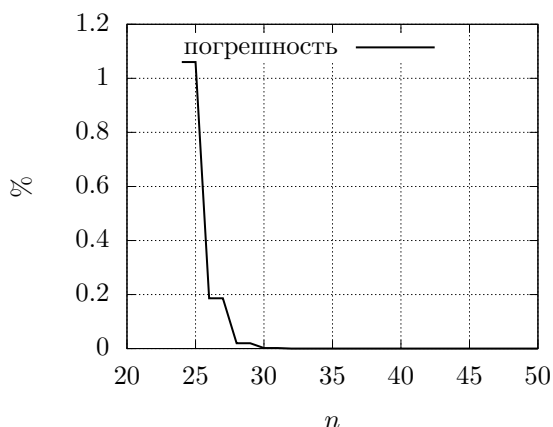


Рис. 6. График зависимости относительной погрешности вычисления λ_3 от суммы n слагаемых

номер собственного значения, тем больше слагаемых ряда требуется для вычислений.

На рис. 4–6 приведены графики зависимости погрешности вычисления собственных значений от количества слагаемых ряда. Из графиков следует, что для вычисления собственных значений приведенной задачи с погрешностью менее 0.01% требуется не менее 13 слагаемых для первой собственной частоты, не менее 22 для второй, и не менее 29 для третьей.

4. Идентификация граничных условий

Обратная задача в терминах функции (15) формулируется следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы краевых условий A неизвестны; ранг матрицы A равен двум; потенциал $q(x) \neq 0$ и симметричен $q(1-x) = q(x)$; известны два собственных значения λ_1, λ_2 соответствующей задачи. Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.*

Соотношение Плюккера. При решении поставленной задачи будет использовано соотношение Плюккера [1, 22–24]. Покажем, как оно выводится для нашей задачи.

С помощью линейных преобразований строк, при условии $J_{13} \neq 0$, матрицу краевых условий можно представить с помощью ее определителей J_{ij} :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & J_{23}/J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13} & J_{24} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Обратим внимание, что в записи матрицы \tilde{A} не используется определитель J_{24} . И его можно вычис-

лить: $J_{24} = \begin{vmatrix} J_{23} & 0 \\ J_{13} & J_{14} \end{vmatrix} = \frac{J_{23}}{J_{13}} J_{14}$. Таким образом, для матрицы должно выполняться соотношение

$$J_{13}J_{24} - J_{23}J_{14} = 0. \quad (19)$$

Если $J_{24} \neq \frac{J_{23}}{J_{13}} J_{14}$ (соотношение (19) не выполняется), то восстановить матрицу краевых условий A по определителям J_{ij} невозможно, поскольку таковой не существует. Этот вывод верен не только в случае $J_{13} \neq 0$, но и в том случае, когда отличен от нуля другой из определителей. В зависимости от того, какой из определителей не равен нулю, матрица A имеет следующий вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & J_{24}/J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13} & J_{14} \end{pmatrix}, \text{ при } J_{14} \neq 0, \quad (20)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{13}/J_{23} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{23} & J_{24} \end{pmatrix}, \text{ при } J_{23} \neq 0, \quad (21)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{14}/J_{24} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{23} & J_{24} \end{pmatrix}, \text{ при } J_{24} \neq 0. \quad (22)$$

Нетрудно заметить, что для всех этих матриц должно выполняться соотношение (19) и верна

Теорема 1 (соотношение Плюккера). Для того чтобы набор чисел $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ являлся набором определителей второго порядка некоторой матрицы размера 2×4 и ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (19), называемое соотношением Плюккера.

Таким образом, если для матрицы краевых условий A найти ее определители $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$, то с помощью формул (18), (20), (21), (22) легко находится сама матрица, а значит и краевые условия.

4.1. Двойственность решения обратной задачи

Допустим λ_1, λ_2 являются собственными значениями соответствующей краевой задачи (4)–(6). Тогда λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (15) [18]. Подставив эти два значения в (15), получим систему двух уравнений для поиска четырех определителей $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ матрицы A :

$$\Delta(\lambda_1) = J_{13}f_{13}(\lambda_1) + (J_{14} + J_{23})f_{14}(\lambda_1) + J_{24}f_{24}(\lambda_1) = 0, \quad (23)$$

$$\Delta(\lambda_2) = J_{13}f_{13}(\lambda_2) + (J_{14} + J_{23})f_{14}(\lambda_2) + J_{24}f_{24}(\lambda_2) = 0. \quad (24)$$

Обозначим через F следующую матрицу, состоящую из коэффициентов системы (23):

$$F = \begin{pmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

а через F_{ij} — определитель, получаемый из F вычеркиванием столбца с элементом $f_{ij}(\lambda_k)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (о двойственности решения).

Пусть λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (4)–(6), ранг матрицы F равен 2, потенциал $q(x) \neq 0$ и симметричен $q(1-x) = q(x)$. Тогда задача идентификации краевых условий имеет два решения, которые представляются в явном виде в терминах определителей F_{ij} .

Доказательство. Обозначим определитель J_{13} через x , сумму $J_{14} + J_{23}$ — через y , J_{24} — через z . В новых обозначениях система (20) запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\lambda_1) &= f_{13}(\lambda_1)x + f_{14}(\lambda_1)y + f_{24}(\lambda_1)z = 0 \\ \Delta(\lambda_2) &= f_{13}(\lambda_2)x + f_{14}(\lambda_2)y + f_{24}(\lambda_2)z = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (26) представляет собой уравнение плоскости

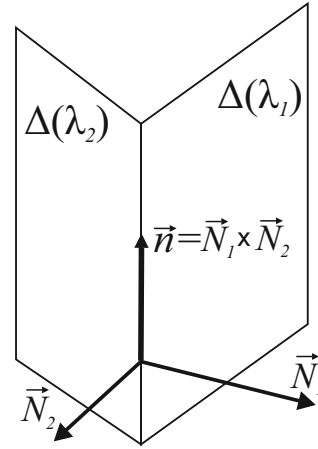


Рис. 7. Пересечение плоскостей, образуемые характеристическими уравнениями

$Ax + By + Cz = 0$, проходящее через начало координат [25] (рис. 7), где $A = f_{13}(\lambda)$, $B = f_{14}(\lambda)$, $C = f_{24}(\lambda)$.

Нормальный вектор плоскости, заданный первым из уравнений системы (26), есть $\vec{N}_1 = (f_{13}(\lambda_1), f_{14}(\lambda_1), f_{24}(\lambda_1))$, а $\vec{N}_2 = (f_{13}(\lambda_2), f_{14}(\lambda_2), f_{24}(\lambda_2))$ — нормальный вектор плоскости, заданный вторым уравнением системы (26) (см. рис. 7). Поскольку ранг матрицы F равен 2, то эти векторы не коллинеарны (плоскости $\Delta(\lambda_1) = 0$ и $\Delta(\lambda_2) = 0$ не совпадают и не параллельны).

Обозначим через $\vec{n} = (a, b, c)$ направляющий вектор прямой, по которой пересекаются плоскости $\Delta(\lambda_1) = 0$ и $\Delta(\lambda_2) = 0$, тогда \vec{n} есть векторное произведение векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 (см. [25] стр. 33):

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix} + \\ &\quad \vec{k} \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, координаты направляющего вектора вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a &= \begin{vmatrix} f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix} = F_{13}, \\ b &= - \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{vmatrix} = -F_{14}, \\ c &= \begin{vmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) \end{vmatrix} = F_{24}. \end{aligned}$$

По координатам направляющего вектора \vec{n} , можем записать параметрическое уравнение прямой в трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} J_{13} = F_{13}t, \\ J_{14} + J_{23} = -F_{14}t, \\ J_{24} = F_{24}t. \end{cases}$$

Далее, используя условие Пюккера (19), получаем систему для нахождения J_{14} и J_{23} :

$$\begin{cases} J_{14} + J_{23} = -F_{14}t, \\ J_{14} \cdot J_{23} = F_{13}F_{24}t^2. \end{cases} \quad (27)$$

Решая (27), получаем

$$\begin{aligned} J_{14} &= \frac{t}{2} \left(-F_{14} \mp \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}} \right), \\ J_{23} &= \frac{t}{2} \left(-F_{14} \pm \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} J_{13} &= F_{13}t, \quad J_{24} = F_{24}t, \\ J_{14} &= \frac{t}{2} \left(-F_{14} \mp \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}} \right), \\ J_{23} &= \frac{t}{2} \left(-F_{14} \pm \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (28) представляют собой уравнения двух прямых в четырехмерном пространстве [26]. Если $F_{13} \neq 0$, то $J_{13} \neq 0$, из (18) и (28) получаем два представления для матрицы A и соответственно два вида краевых условий (5), (6), где $a_{11} = 1$, $a_{12} = J_{23}/J_{13}$, $a_{23} = J_{13}$, $a_{24} = J_{14}$, а определители J_{ij} находятся в явном виде по формулам (28). Аналогично получаются явные выражения для краевых условий в случаях $J_{14} \neq 0$, $J_{23} \neq 0$ и $J_{24} \neq 0$. Таким образом, с помощью представлений (18), (20), (21), (22) через уравнения двух прямых, выражаемых уравнениями (28), получаем два явных решения задачи идентификации краевых условий (матрицы A). Что и требовалось доказать.

Возникает вопрос: по двум собственным значениям получили два решения; нельзя ли, используя большее число собственных значений задачи (4)–(6) получить единственность решения задачи определения краевых условий (5)–(6)? Оказывается — нет. С помощью того факта, что характеристический определитель задачи (4)–(6) является четной целой функцией первого порядка, легко показывается, что даже, если известны все собственные значения, все равно получается двойственность решения задачи определения краевых условий.

Пример 1 (контрпример для $q \equiv 0$). Значения $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = 2\pi$ являются собственными значениями двух краевых задач:

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Для этих задач матрицы краевых условий выглядят следующим образом:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях ранг матрицы

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 1 и определители $F_{13} = 0$, $F_{14} = 0$, $F_{24} = 0$. Поэтому применение Теоремы 2 некорректно. Однако сам метод, использованный в теореме 2 и основанный на соотношениях Пюккера, позволяет найти оба представления для матрицы A . Причем, для этого можно использовать и одно собственное значение, например, $\lambda_1 = \pi$. Действительно, из (15) имеем

$$\Delta(\pi) = J_{13} \pi \sin \pi - (J_{14} + J_{23}) \cos \pi -$$

$$-J_{24} \frac{\sin \pi}{\pi} = J_{14} + J_{23} = 0.$$

Отсюда и из того, что коэффициенты неотрицательны, следует, что $J_{14} = J_{23} = 0$. Если в дополнение к этим равенствам использовать соотношение Пюккера (19), получим: $J_{13}J_{24} = J_{14}J_{23} = 0$. Отсюда вытекают две возможности: 1) $J_{24} \neq 0$, $J_{13} = J_{14} = J_{23} = 0$, 2) $J_{13} \neq 0$, $J_{24} = J_{14} = J_{23} = 0$, которые и соответствуют задачам 1) $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ и 2) $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ соответственно.

Заметим, что спектры этих двух задач отличаются только значением $\lambda = 0$. Это значение принадлежит спектру второй краевой задачи и не принадлежит спектру первой задачи. Если решить задачу по двум собственным значениям $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \pi$, то получим:

$$F := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank(F) = 2$, тогда теорема 2 применима и мы получим единственное решение:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условие Теоремы 2 ($rank(F) = 2$) существенно. Однако, сам метод, основанный на соотношении Пюккера, позволяет иногда получить некоторые полезные результаты и по одному собственному значению.

4.2. Корректность обратной задачи по Тихонову

Если собственные значения λ_1, λ_2 краевой задачи (4)–(6) известны лишь с большой погрешностью, то непосредственное использование представлений (18), (20), (21), (22) может привести к результатам, которые не поддаются физической интерпретации. Например, в случае, если $F_{14}^2 - 4F_{13}F_{14} < 0$ в качестве коэффициентов краевых условий получаем комплексные (недействительные) числа. Что понимать в этом случае под приближенным решением? Для правильного ответа на этот вопрос требуется применение теории некорректных задач [27–30].

Задача идентификации краевых условий (5)–(6) по двум собственным значениям задачи (4)–(6) не является корректной по Адамару. Она имеет бесконечно много решений (четыре числа $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ пробегает бесконечное множество точек двух прямых (28)). Однако, можно выделить множество корректности обратной задачи и доказать ее корректность по методу Тихонова.

Действительно, для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое существенно более узкое, чем все пространство V , множество $M \subset V$. Пусть образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество A , т.е. $A = RM$.

Задача $Rv = z$ называется *корректной по А.Н. Тихонову* (условно корректной), если выполнены следующие условия [1–4]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V ;

2) решение единственно на множестве M ;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых z, \tilde{z} и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_Z < \delta$ выполнено неравенство $\|v - \tilde{v}\|_Z < \varepsilon$.

В нашем случае под оператором R подразумевается отображение, задаваемое системой уравнений (28), переводящее четыре числа $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ в два значения λ_k ($k = 1, 2$).

Теорема 3 (о корректности задачи по А.Н. Тихонову). Пусть λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (4)–(6), ранг матрицы F равен 2, потенциал $q(x) \neq 0$ и симметричен $q(1-x) = q(x)$. Тогда задача идентификации краевых условий задачи (4)–(6) по значениям λ_1, λ_2 — корректна по Тихонову.

Доказательство. Для доказательства корректности по Тихонову достаточно построить множество корректности, которое является компактом.

Чтобы выделить множество корректности введем норму

$$\|v\| = \max(|J_{13}|, |J_{14}|, |J_{23}|, |J_{24}|).$$

Будем называть *множеством корректности* M такое множество четверок $v = (J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24})$, для которых выполнены условия:

1. $\|v\| = \max(|J_{13}|, |J_{14}|, |J_{23}|, |J_{24}|) = 1$;

2. $J_{13} \geq 0, J_{14} \geq 0, J_{23} \geq 0, J_{24} \geq 0$;

3. $J_{14} > J_{23}$;

4. Соотношение Плюккера (19).

Условие 1 обеспечивает математическое существование набора решений $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ в четырехмерном пространстве (четыре точки пересечения двух прямых (28) со сферой $\|v\| = \max(|J_{13}|, |J_{14}|, |J_{23}|, |J_{24}|) = 1$). Условие 2 исходит из физического смысла коэффициентов a_{ij} и выделяет из этих четырех решений два (одно, если они совпадают) физических решения. Условие 3 выделяет из этих двух решений одно решение $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$. Условие 4 обеспечивает существование матрицы A , определяемой по числам $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$.

Заметим, что множество корректности является компактом, так как оно ограничено (оно лежит на единичной сфере) и замкнуто (так как все неравенства, ограничивающие это множество, нестрогие).

С помощью определенного выше множества корректности можно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи поиска $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ по собственным значениям λ_1, λ_2 .

Пусть V — это пространство \mathbb{R}^4 элементов $v = (J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24})$ с нормой $\|v\| = \max(|J_{13}|, |J_{14}|, |J_{23}|, |J_{24}|)$; Z — это пространство \mathbb{R}^2 элементов $z = (\lambda_1, \lambda_2)$ с нормой $\|z\| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, образ множества M при отображении с помощью оператора R в пространстве Z есть множество A , т.е. $A = RM$.

Отсюда следует, что задача $Rv = z$ *корректна по Тихонову*, так как все три условия определения выполнены (третье условие вытекает из аналитичности по λ функций $f_{13}(\lambda), f_{14}(\lambda), f_{24}(\lambda)$). Что и требовалось доказать.

Если λ_1, λ_2 являются точными собственными значениями соответствующей краевой задачи (4)–(6), то в множестве корректности M , задаваемого условиями 1–4, существует единственное решение задачи отыскания краевых условий. Оно дается представлениями (18), (20), (21), (22), где

$J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$ представляют собой пересечение прямых (28) с множеством корректности M . Вообще же, решений будет два. Вторым решением задачи отыскания краевых условий можно считать решение, получаемое из первого перестановкой J_{14} и J_{23} .

В случае же, если λ_1, λ_2 не являются точными собственными значениями соответствующей краевой задачи (4)–(6), то этот метод не годится и следует привлечь известные методы решения некорректных задач. Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач — метод квазирешения и метод подбора. В настоящей работе предлагается метод решения задачи идентификации краевых условий, который по сути представляет собой метод подбора. Метод подбора состоит в том, что из класса возможных решений $M \subset V$ подбирают элемент \tilde{v} , для которого $R\tilde{v}$ приближает правую часть уравнения $Rv = z$ с требуемой точностью. В качестве искомого приближенного решения берут элемент \tilde{v} . Этот метод применим, когда из неравенства $\|v - \tilde{v}\| < \delta$ следует, что $\|z - \tilde{z}\| < \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Это имеет место при условии однозначной разрешимости уравнения $Rv = z$ и при условии, что множество M — компакт (см. [31]).

4.3. Метод идентификации краевых условий

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения краевой задачи (4)–(6), найденные с некоторой погрешностью. Подставив эти два значения в уравнение (21), получим матрицу F и определители F_{ij} , получаемые из F вычеркиванием столбца с элементом $f_{ij}(\lambda_k)$. Подставив эти определители в (28), получим определители $J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}$. Если J_{14}, J_{23} являются комплексно сопряженными, то в качестве $\tilde{J}_{14}, \tilde{J}_{23}$ возьмем их реальные части. Явный вид матрицы A (а значит и краевых условий) зависит от того, какое из чисел $J_{13}, \tilde{J}_{14}, \tilde{J}_{23}, J_{24}$ больше по модулю.

Случай 1. Если наибольшим по модулю является J_{13} , то приближенным решением задачи будем считать следующую матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{a}_{24} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\tilde{a}_{12} = \max(0, \operatorname{Re}(J_{23})/J_{13})$, $\tilde{a}_{24} = \max(0, \operatorname{Re}(J_{14})/J_{13})$, $\tilde{J}_{24} = \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{a}_{24}$. Таких матриц две. Для одной из матриц $J_{14} \geq J_{23}$. Именно ее миноры лежат в множестве корректности, так как, во-первых, максимальный по модулю минор равен единице, во-вторых, все миноры неотрицательны, в-третьих, $J_{14} \geq J_{23}$, в-четвертых, выполнено соотношение Пюккера $\tilde{J}_{24} = \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{a}_{24} = \tilde{J}_{23} \cdot \tilde{J}_{14}/\tilde{J}_{13}$. При стремлении λ_1, λ_2 к точным значениям,

соответствующим физическому смыслу задачи, приближенное решение (29) стремится к точному

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & J_{23}/J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & J_{14}/J_{13} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Если наибольшим по модулю является $\operatorname{Re}(J_{14})$ или $\operatorname{Re}(J_{23})$, то приближенным решением задачи будем считать следующую матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{23} & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где $\tilde{a}_{12} = \max(0, J_{24}/\operatorname{Re}(J_{14}))$, $\tilde{a}_{23} = \max(0, J_{13}/\operatorname{Re}(J_{14}))$, $\tilde{J}_{23} = \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{a}_{23}$.

Таких матриц две. Для одной из них $\operatorname{Re}(J_{14})$ больше, чем у другой. Для этой матрицы $J_{14} \geq J_{23}$. Именно ее миноры лежат в множестве корректности, так как, во-первых, максимальный по модулю минор равен единице, во-вторых, все миноры неотрицательны, в-третьих, $J_{14} \geq J_{23}$, в-четвертых, выполнено соотношение Пюккера $\tilde{J}_{23} = \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{a}_{23} = \tilde{J}_{24} \cdot \tilde{J}_{13}/\tilde{J}_{14}$. При стремлении λ_1, λ_2 к точным значениям, соответствующим физическому смыслу задачи, приближенное решение (30) стремится к точному

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & J_{24}/J_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13}/J_{14} & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай 3. Если наибольшим по модулю является J_{24} , то приближенным решением задачи будем считать следующую матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{23} & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $\tilde{a}_{11} = \max(0, \operatorname{Re}(J_{14})/J_{24})$, $\tilde{a}_{24} = \max(0, \operatorname{Re}(J_{23}/J_{24}))$, $\tilde{J}_{13} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{23} = \tilde{J}_{14} \cdot \tilde{J}_{23}/\tilde{J}_{24}$.

Таких матриц две. Для одной из матриц $J_{14} \geq J_{23}$. Именно ее определители лежат в множестве корректности, так как, во-первых, максимальный по модулю определитель равен единице, во-вторых, все определители неотрицательны, в-третьих, $J_{14} \geq J_{23}$, в-четвертых, выполнено соотношение Пюккера $\tilde{J}_{13} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{23} = \tilde{J}_{23} \cdot \tilde{J}_{14}/\tilde{J}_{24}$. При стремлении λ_1, λ_2 к точным значениям, соответствующим физическому смыслу задачи, приближенное решение (31) стремится к точному

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{14}/J_{24} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{23}/J_{24} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим примеры для каждого из трех случаев (29), (30), (31).

4.4. Примеры.

Пример 1 (случай 1). Требуется по двум собственным значениям $\lambda_1 = 0.8019$, $\lambda_2 = 3.349$ определить матрицу краевых условий. Из (28) находим два решения: $J_{13} = 1.000$, $J_{14} = 0.205$, $J_{23} = 0.493$, $J_{24} = 0.101$; $J_{13} = 1.000$, $J_{14} = 0.493$, $J_{23} = 0.205$, $J_{24} = 0.100$. Так как наибольшим по модулю является J_{13} , то подставляем найденные решения в (29), получаем два решения. В множестве корректности лежит то решение, для которого $J_{14} > J_{23}$, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0.500 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 (случай 2). Требуется по двум собственным значениям $\lambda_1 = 1.361$, $\lambda_2 = 3.745$ определить матрицу краевых условий. Применяя (26), получаем два набора решений: $J_{13} = 0.600$, $J_{14} = 0.420$, $J_{23} = 1.000$, $J_{24} = 0.700$ и $J_{13} = 0.600$, $J_{14} = 1.000$, $J_{23} = 0.420$, $J_{24} = 0.700$. Так как в первом наборе решений наибольшими по модулю являются J_{23} , а для второго — J_{14} , то из условия $J_{14} > J_{23}$, выбираем второй набор. Подставляя найденное решение в (30), получаем:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.600 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

Пример 3 (случай 3). Пусть собственные значения краевой задачи равны $\lambda_1 = 2.498$, $\lambda_2 = 5.276$. Применяя (28), получаем два набора решений: $J_{13} = 0.000$, $J_{14} = 0.000$, $J_{23} = 0.300$, $J_{24} = 1.000$; $J_{13} = 0.000$, $J_{14} = 0.300$, $J_{23} = 0.000$, $J_{24} = 1.000$. Так как наибольшим по модулю является J_{24} , то подставляем найденные решения в (31). В множестве корректности лежит то из решений, для которого $J_{14} > J_{23}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.300 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix}.$$

4.5. Оценка погрешности метода идентификации

Как и в разделе 3.1., для оценки погрешности метода идентификации будет применен метод фильтрации численных результатов. Отличие заключается в выборе модели погрешности и метода фильтрации. Перед применением приведем его описание.

Фильтрация при кратном увеличении числа узлов

Пусть имеется последовательность z_{n_i} , $i = 1, \dots, J$ вычисленных результатов. При увеличении n в целое число раз, т.е. $n_i = n_1 Q^{i-1}$, задача фильтрации решается точно, несмотря на наличие неизвестной составляющей погрешности $\Delta(n)$. Чтобы

применить данное свойство, рассмотрим два значения $z_{n_{i-1}}$, z_{n_i} , вычисленные при числе узлов, равном n_{i-1} и $n_i = Qn_{i-1}$ соответственно. Рассмотрим их линейную комбинацию

$$z_{n_i}^{(j)} = \alpha_j z_{n_{i-1}}^{(j-1)} + \beta_j z_{n_i}^{(j-1)} =$$

$$(\alpha_j + \beta_j)z + (\alpha_j n_{i-1}^{-k_j} + \beta_j n_i^{-k_j})c_j^{j-1} + \dots$$

($j = 1, \dots, L$, $z_{n_i}^{(0)} = z_{n_i}$) и потребуем, чтобы сумма коэффициентов при z была равна 1, а при c_j^{j-1} равна 0. Тогда $\alpha_j = -(Q^{k_j} - 1)^{-1}$, $\beta_j = 1 - \alpha_j$. Откуда получаем формулу фильтрации, которая в данном случае совпадает с экстраполяционной формулой Ричардсона

$$z_{n_i}^{(j)} = z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{Q^{k_j} - 1}.$$

Проводя последовательно фильтрацию по всем парам соседних значений $z_{n_{i-1}}$, z_{n_i} , получим отфильтрованную зависимость, не содержащую члена с n^{-k_j} :

$$z_n^{(j)} = z + c_{j+1}^{(j)} n^{-k_{j+1}} + \dots + c_L^j n^{-k_L} + \Delta^{(j)}(n),$$

где

$$c_l^{(j)} = \left(\alpha_j \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{-k_l} + \beta_j \right) c_l^{(j-1)} =$$

$$c_l^{(j-1)} \frac{Q^{k_j} - Q^{k_l}}{Q^{k_j} - 1}, l = j + 1, \dots, L.$$

Заметим, что отфильтрованная последовательность $z_{n_i}^{(j)}$ содержит на один член меньше, чем $z_{n_i}^{(j-1)}$. Если $z_{n_i}^{(j)}$ содержит больше одного члена, то процесс фильтрации можно повторить, устранив степенную составляющую с $n^{k_{j+1}}$ и т.д. Результаты фильтрации наглядно представляются в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} n & z_n & z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & z_n^{(3)} & \dots \\ 10 & z_{10} & - & - & - & \\ 20 & z_{20} & z_{20}^{(1)} & - & - & \\ 40 & z_{40} & z_{40}^{(1)} & z_{40}^{(2)} & - & \\ 80 & z_{80} & z_{80}^{(1)} & z_{80}^{(2)} & z_{80}^{(3)} & \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Главным ограничением для применения рассмотренного метода является наличие неизвестной составляющей погрешности $\Delta(n)$.

Если зависимость z_n от n имеет нерегулярную составляющую $\Delta_n^{(0)}$, модуль которой оценивается сверху величиной $\Delta^{(0)}$, то модуль нерегулярной части погрешности $\Delta^{(L)}$, содержащейся в значениях

$z_n^{(L)}$ при каждой фильтрации, можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta^{(L)} &= \Delta^{(L-1)} + \frac{\Delta^{(L-1)} + \Delta^{(L-1)}}{Q^{(k_L)} - 1} = \\ &= \frac{Q^{k_L} + 1}{Q^{k_L} - 1} \Delta^{(L-1)}. \end{aligned}$$

Произведем оценку погрешности метода миноров с помощью приведенного метода фильтрации численных результатов. Для модели погрешности (16) в качестве z_n примем найденный коэффициент граничных условий a_{ij} при точности собственного значения n знаков. Поскольку для проверки обратной задачи используется решение прямой, то нам известно точное значение z искомого величины a_{ij} . С точным значением собственных чисел λ ситуация немного сложнее, так как его можно вычислить только с некоторой погрешностью. На первом этапе вычислим собственные значения λ с погрешностью порядка не более 10^{-16} , примем это значение в качестве точного.

На каждом шаге l точному значению λ будем прибавлять величину $\Delta_l = \Delta_0 Q^{l-1}$ и вычислять неизвестные коэффициенты a_{ij} . В качестве первоначального возмущения возьмем $\Delta_0 = 10^{-16}$, а $Q = 2$. Результаты фильтрации приведены на рис. 8–10 в логарифмическом масштабе.

На рис. 8–10 показаны результаты после двух шагов фильтрации, где на оси абсцисс отложены n , на оси ординат десятичные логарифмы относительной погрешности $-\lg \Delta_n$. Через «0» обозначена кривая зависимости точности решения от уточнения входных данных, через «1» — кривая, полученная в результате первой фильтрации, а «2» — кривая после второй фильтрации. Из рис. 8–10 видно, что точность нахождения коэффициентов граничных условий ограничена длиной мантиссы в 16 знаков и достигается при точности входных данных $n = 6$ знаков (при погрешности $\Delta(\lambda) < 10^{-6}$). Дальнейшее уточнение λ приводит к не сильному уточнению решения.

Рассмотрим отношение абсолютной погрешности результата к абсолютной погрешности входных данных. Из табл. 2 видно, что погрешность найденного коэффициента a_{12} в 5 раз больше погрешности собственной частоты λ_1 . Следовательно, чтобы вычислить значение a_{12} с погрешностью 10^{-1} , необходимо взять λ_1 с погрешностью менее, чем $5 \cdot 10^{-1}$.

Оценка зависимости относительной погрешности от точности входных данных показала, что относительная погрешность стабильно меньше одного процента при точности входных данных 7 знаков.

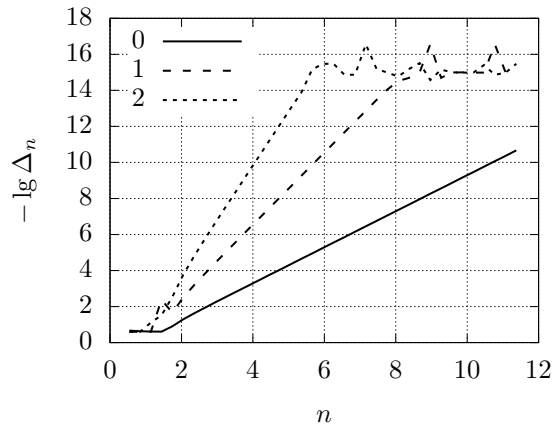


Рис. 8. Результат фильтрации вычисления коэффициента a_{12} при изменении точности λ_1

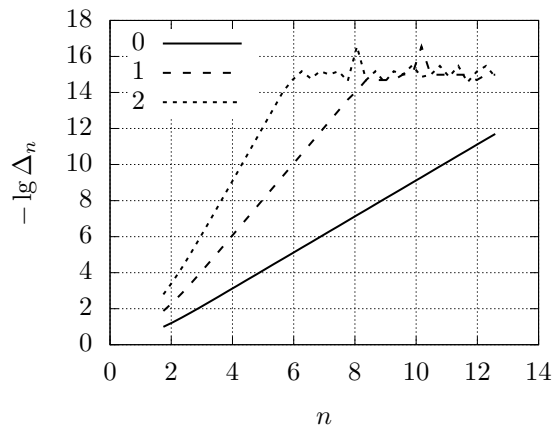


Рис. 9. Результат фильтрации вычисления коэффициента a_{12} при изменении точности λ_2

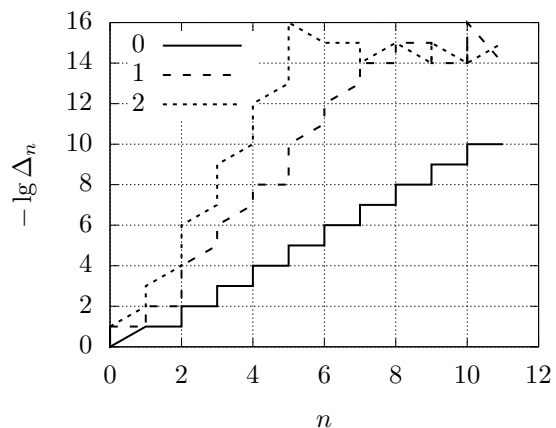


Рис. 10. Результат фильтрации вычисления коэффициента a_{12} при изменении точности λ_1 и λ_2

Таблица 2. Отношение абсолютной погрешности результата к погрешности входных данных

$\Delta(\lambda_1)$	$\Delta(a_{12})$	$\Delta(a_{12})/\Delta(\lambda_1)$
0,1000000000	0,2395694729	2,395694729
0,0100000000	0,0584671715	5,84671715
0,0010000000	0,0051703922	5,1703922
0,0001000000	0,0005117829	5,117829
0,0000100000	0,0000511267	5,11267
0,0000010000	0,0000051122	5,1122
0,0000009999	0,0000005111	5,111000003
0,0000000100	0,0000000510	5,099999974
0,0000000010	0,0000000053	5,300000144
0,0000000001	0,0000000004	3,999999722

5. Заключение

В работе рассмотрены решения как *прямых*, так и *обратных* задач.

По классификации обратных задач, описанных в книге А.О. Ватульяна [32], постановка обратной задачи, приведенная в данной работе, относится к обратным граничным задачам. Данная задача отличается от ранее рассмотренных тем, что для решения используется не весь спектр собственных частот, а только две собственные частоты. Доказана теорема существования и двойственности решения для случая с симметричным потенциалом $q(1-x) = q(x)$. Найдено множество корректности задачи и доказана корректность ее по Тихонову. Предложен метод ее решения. Приведены соответствующие примеры и контрпример, показывающий существенность условия теоремы ($\text{rank } F = 2$). Проанализирована относительная погрешность метода. Проведена оценка устойчивости решения методами фильтрации численных результатов. Показано, что хорошая сходимость метода достигается при выборе входных данных, погрешность которых не превышает 10^{-6} .

Список литературы

- [1] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
- [2] Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1011–1015.
- [3] Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Акустическая диагностика сосредоточенных масс на концах струнного графа с упругим закреплением на концах // Вестник Башкирского университета. 2014. Т. 19, № 1. С. 158–163.
- [4] Мартынова Ю.В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе // Вестник Башкирского университета. 2011. Т. 16, № 1. С. 4–10.
- [5] Сергиенко И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека; НАН Украины, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова. Киев: Наукова думка, 2009. 639 с.
- [6] Халилов С.А., Минтюк В.Б. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели // Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2003. Вып. 2. С. 6–10.
- [7] Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи: учебник. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2011. 232 с.
- [8] Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. 457 pp. (Русский перевод: Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 608 с.)
- [9] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.
- [10] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
- [11] Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
- [12] Freiling, G., Yurko, V. A. Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter // Inverse Problems, 2010. V. 26. № 5. 055003 (17 pp).
- [13] Ахтямов А.М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. МММИУ. 2001. Т. 5, № 3, С. 103–110.
- [14] Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ахтямова А.А. Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 3. С. 114–129.
- [15] Ахтямов А. М., Муфтахов А. В. Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Том XV, № 4(52). С. 24–37.

- [16] Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. Учебно-методическое пособие. М.: МГУ, 1993. 155 с.
- [17] Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
- [18] Неймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- [19] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями. // Математические заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 569–576.
- [20] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
- [21] Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Моделирование течений вязкой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа / В.П. Житников, Н.М. Шерыхалина. Уфа: Гилем, 2009. 336 с.
- [22] Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 314 с.
- [23] Hodge W. V. D., Pedoe D. Methods of Algebraic Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 440 p.
- [24] Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1956. 439 с.
- [25] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр.. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
- [26] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Физматлит, 2004. 464 с.
- [27] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 285 с.
- [28] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
- [29] Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 614 с.
- [30] Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 702 с.
- [31] Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР, 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
- [32] Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

Identification of the string boundary conditions using natural frequencies

Utyashev I.M., Akhtyamov A.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The paper discusses direct and inverse problems of oscillations of the string taking into account symmetrical characteristics of the external environment. In particular, we propose a modified method of finding natural frequencies using power series, and also the problem of identification of the boundary conditions type and parameters for the boundary value problem describing the vibrations of a string is solved. It is shown that to identify the form and parameters of the boundary conditions the two natural frequencies is enough in the case of a symmetric potential $q(x)$. The estimation of the convergence of the proposed methods is done.

Keywords: spectral problem, boundary conditions identification, string, Plucker condition, eigenvalues

