ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 11 (2016), № 2, с. 205–209
УДК 517.95

http://proc.uimech.org/uim2016.2.030
DOI: 10.21662/uim2016.2.030

Получена: 16.12.2016
Принята: 28.12.2016

Движение объема частиц, соответствующее инвариантному решению подмодели ранга 2 гидродинамического типа[1]

Сираева Д.Т.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Для уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии, приведена инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из суммы переносов. В лагранжевых координатах из условия негиперболичности подмодели получены решения, зависящие от четырех существенных постоянных. Для простоты рассмотрено решение с двумя постоянными. Посредством пакета Maple изучены траектории движения частиц, а также движение параллелепипеда из одних и тех же частиц.

Ключевые слова: модель гидродинамического типа, инвариантная подмодель ранга 2, точное решение, траектория

1. Введение

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа [1]:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ &p_t + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho f_\rho \mathrm{div}\vec{u} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u}(t,\vec{x})$ — вектор скорости частицы; $\rho(t,\vec{x})$ — плотность; $S(t,\vec{x})$ — энтропия; $p(t,\vec{x})$ — давление. Плотность, энтропия и давление связаны уравнением состояния $p = f(\rho) + g(S)$.

Уравнения (1) инвариантны при действии группы преобразований:

$$\begin{aligned} &1.\quad \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a},\\ &2.\quad t' = t + a_0,\\ &3.\quad \vec{x}\,' = O\vec{x}, \vec{u}\,' = O\vec{u}, OO^T = 1, \det O = 1,\\ &4.\quad \vec{x}\,' = \vec{x} + t\vec{b}, \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{b},\\ &5.\quad t' = tc, \vec{x}\,' = c\vec{x},\\ &6.\quad p' = p + a_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Группе преобразований (2) соответствует двенадцатимерная алгебра Ли L_{12} с базисом в декартовой системе координат:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\quad X_2 = \partial_y,\quad X_3 = \partial_z,\\ X_4 = t\partial_x + \partial_u,\quad X_5 = t\partial_y + \partial_\nu,\\ X_6 = t\partial_z + \partial_w,\\ X_7 = y\partial_z - z\partial_y + \nu\partial_w - w\partial_\nu,\\ X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,\\ X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\nu - \nu\partial_u,\quad X_{10} = \partial_t,\\ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\quad Y_1 = \partial_p. \end{gathered}$$

Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [2]. Из оптимальной системы рассматривается двумерная подалгебра с номером 2.36:

$$X_3 + X_4, X_1 + Y_1. \tag{3}$$

В работе [3] для подалгебры (3) с помощью подстановки представления решения

$$u = v_1 + z, v = u_1, w = w_1, \rho, p = p_1 + x - tz \tag{4}$$

в уравнения (1) получена инвариантная подмодель

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97027-р_поволжье_а).

ранга два:

$$\begin{gathered} Du_1+\rho^{-1}p_{1y}=0,\\ Dv_1=-w_1-\rho^{-1},\\ Dw_1=t\rho^{-1},\\ D\rho+\rho u_{1y}=0,\\ Dp_1+\rho f_\rho u_{1y}=tw_1-v_1, \end{gathered} \tag{5}$$

где $D=\partial_t+u_1\partial_y$; функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 зависят от t, y. Вводится замена независимых переменных: $t=t(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ (обратная замена $\xi=\xi(t,y)$, $\eta=\eta(t,y)$, якобиан: $I=t_\xi y_\eta-t_\eta y_\xi\neq 0$). Новые переменные будут лагранжевыми, если выполнено равенство: $D=\partial_\xi=t_\xi\partial_t+y_\xi\partial_y\Rightarrow y_\xi=u_1$, $t_\xi=1\Rightarrow t=\xi+\eta$, $I=y_\eta-y_\xi\neq 0$. В лагранжевых переменных инвариантная подмодель (5) имеет вид:

$$\begin{gathered} y_{\xi\xi}+\frac{p_{1\eta}-p_{1\xi}}{\rho(y_\eta-y_\xi)}=0,\\ v_{1\xi}=-w_1-\rho^{-1},\\ w_{1\xi}=(\xi+\eta)\rho^{-1},\\ \rho_\xi+\rho(\ln(y_\eta-y_\xi))_\xi=0,\\ p_{1\xi}+\rho f_\rho(\ln(y_\eta-y_\xi))_\xi=(\xi+\eta)w_1-v_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Из (6) следуют интегралы:

$$\begin{gathered} \rho(y_\eta-y_\xi)=R(\eta)>0,\\ p_1=f(\rho)-w_1-(\xi+\eta)v_1+Q(\eta). \end{gathered} \tag{7}$$

Система (6), учитывая интегралы (7), примет вид:

$$\begin{gathered} v_{1\xi}+w_1+V=0,\\ w_{1\xi}=(\xi+\eta)V,\\ u_{1\xi}+RV_\xi=u_{1\eta},\\ -Ru_{1\xi}+g'V_\xi=g'V_\eta-\\ -w_{1\eta}-(\xi+\eta)(v_{1\eta}+w_1)+Q', \end{gathered} \tag{8}$$

где $V=\rho^{-1}$, $f(\rho)=g(V)$, $f'(\rho)=-g'_V V^2>0$. При $g'+R^2=0$ следует $V=V(\eta)$. В этом случае система (8) переопределена и из нее находятся функции u_1, v_1, w_1:

$$\begin{gathered} v_1=-\tfrac{1}{6}\xi^3V-\tfrac{1}{2}\xi^2\eta V-\xi(V+W)+V_1(\eta),\\ w_1=\tfrac{1}{2}\xi^2V+\xi\eta V+W(\eta),\\ u_1=\tfrac{1}{5}A_4\xi^5+\tfrac{1}{4}A_3\xi^4+\tfrac{1}{3}A_2\xi^3+\tfrac{1}{2}A_1\xi^2+\\ +A_0\xi+U_1(\eta),\\ A_4=-\tfrac{1}{6}R^{-1}V', A_3=-\tfrac{2}{3}\eta V'R^{-1},\\ A_2=(-\tfrac{1}{2}V'-W'+\eta V-\tfrac{1}{2}\eta^2V')R^{-1},\\ A_1=((1+\eta)^2V+V_1'+W-\eta W')R^{-1},\\ A_0=(-Q'+W'+\eta V_1'+\eta W)R^{-1}+RV'. \end{gathered} \tag{9}$$

При этом неизвестны функции V, R, Q, W, V_1, U_1 от одной переменной η. В силу третьего уравнения из (8) при $V=V(\eta)$ и выражения для u_1 из (9) следуют равенства:

$$\begin{gathered} A_4=A_{40}, A_3=4A_{40}\eta+A_{30},\\ A_2=6A_{40}\eta^2+3A_{30}\eta+A_{20},\\ A_1=4A_{40}\eta^3+3A_{30}\eta^2+2A_{20}\eta+A_{10},\\ A_0=A_{40}\eta^4+A_{30}\eta^3+A_{20}\eta^2+A_{10}\eta+A_{00},\\ U_1=\tfrac{1}{5}A_{40}\eta^5+\tfrac{1}{4}A_{30}\eta^4+\tfrac{1}{3}A_{20}\eta^3+\\ +\tfrac{1}{2}A_{10}\eta^2+A_{00}\eta+U_{10}, \end{gathered} \tag{10}$$

где A_{i0}, U_{10} — постоянные, $i=0..4$. Выражения (10) для A_i сравниваются с выражениями из (9):

$$\begin{gathered} V'=-6RA_{40}, A_{30}=0,\\ RA_{20}=\tfrac{1}{2}V'(\eta^2-1)-W'+\eta V,\\ (1+\eta^2)V+V_1'+W-\eta W'=\\ =(4A_{40}\eta^3+2A_{20}\eta+A_{10})R,\\ -Q'+W'+\eta V_1'+\eta W+R^2V'=\\ =(A_{40}\eta^4+A_{20}\eta^2+A_{10}\eta+A_{00})R. \end{gathered} \tag{11}$$

Если $A_{40}=0$, то решение (11) имеет вид:

$$\begin{gathered} V=V_0, R=R_0,\\ W=\tfrac{1}{2}\eta^2V_0-\eta R_0A_{20}+W_0,\\ V_1=-\tfrac{1}{6}V_0\eta^3+R_0A_{20}\eta^2+\\ +(R_0A_{10}-W_0-V_0)\eta+V_{10},\\ Q=Q_0+W_0-R_0(A_{00}+A_{20})\eta. \end{gathered} \tag{12}$$

С помощью (12) и представления инвариантного решения (4) получено точное решение [3] уравнений гидродинамического типа (1):

$$\begin{gathered} u=z-t(\tfrac{1}{6}t^2+1)V_0-tW_0+V_{10}+\\ +(y-\tfrac{1}{12}A_{20}t^4-\tfrac{1}{6}A_{10}t^3-\\ -\tfrac{1}{2}A_{00}t^2-U_{10}t-x_{10})(tA_{20}+A_{10})V_0^{-1},\\ v=\tfrac{1}{3}A_{20}t^3+\tfrac{1}{2}A_{10}t^2+A_{00}t+U_{10},\\ w=\tfrac{1}{2}V_0t^2+W_0-V_0^{-1}A_{20}(y-\tfrac{1}{12}A_{20}t^4-\\ \tfrac{1}{6}A_{10}t^3-\tfrac{1}{2}A_{00}t^2-U_{10}t-x_{10}),\\ \rho=\tfrac{1}{V_0},\\ p=x-tz+g(V_0)+\tfrac{1}{2}t^2(\tfrac{1}{3}t^2+1)V_0+\\ +W_0t^2-V_{10}t+Q_0-V_0^{-1}\cdot\\ \cdot(A_{20}t^2+A_{10}t+A_{00})(y-\tfrac{1}{12}A_{20}t^4-\\ -\tfrac{1}{6}A_{10}t^3-\tfrac{1}{2}A_{00}t^2-U_{10}t-x_{10}), \end{gathered} \tag{13}$$

В силу (2) можно получить $W_0 = V_{10} = U_{10} = x_{10} = g(V_0) = Q_0 = 0$. Таким образом, (13) зависит от четырех существенных постоянных V_0, A_{00}, A_{10}, A_{20}.

2. Мировые линии частиц

Рассматривается простейший случай решения (13) при $A_{20} = A_{10} = 0$:

$$\begin{aligned} u &= z - t(\tfrac{1}{6}t^2 + 1)V_0, \\ v &= A_{00}t, \\ w &= \tfrac{1}{2}V_0 t^2, \\ \rho &= \tfrac{1}{V_0}, \\ p &= x - tz + \tfrac{1}{2}t^2(\tfrac{1}{3}t^2 + 1)V_0 - \\ &- A_{00}V_0^{-1}(y - \tfrac{1}{2}A_{00}t^2) \end{aligned} \tag{14}$$

Движение частиц определяется из равенств $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$, $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$. Тогда решения (14) уравнений движения частиц (1) примет вид:

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}V_0 t^2 + z_0 t + x_0, \\ y &= \tfrac{1}{2}A_{00}t^2 + y_0, \\ z &= \tfrac{1}{6}V_0 t^3 + z_0, V_0 > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

При $A_{00} \neq 0$ с помощью замены $\dfrac{z}{V_0} = \overline{z}$, $\dfrac{z_0}{V_0} = \overline{z_0}$, $\dfrac{x}{V_0} = \overline{x}$, $\dfrac{x_0}{V_0} = \overline{x_0}$, $\dfrac{y}{A_{00}} = \overline{y}$, $\dfrac{y_0}{A_{00}} = \overline{y_0}$ равенства (15) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= -\tfrac{1}{2}t^2 + \overline{z_0}t + \overline{x_0}, \\ \overline{y} &= \tfrac{1}{2}t^2 + \overline{y_0}, \\ \overline{z} &= \tfrac{1}{6}t^3 + \overline{z_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Плотность и давление в частице постоянны: $\rho = V_0^{-1}$, $p = x_0 - A_{00}V_0^{-1}y_0$.

Мировые линии частиц не пересекаются, так как Якобиан перехода от переменных $\overline{x_0}$, $\overline{y_0}$, $\overline{z_0}$ к переменным $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ равен 1.

Отражение $t \to -t$, $z_0 \to -z_0$, $z \to -z$ не изменяет выражения (15), поэтому достаточно описать движение частиц при $t > 0$. С помощью отражения $z_0 \to -z_0$, $z \to -z$ получится решение (16) при $t < 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке с начальными координатами $(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{z_0})$. Достаточно построить кривую, исходящую из точки $\overline{x_0} = 0$, $\overline{y_0} = 0$. Если $\overline{x_0}^2 + \overline{y_0}^2 \neq 0$, то траектория, исходящая из этой точки, получается с помощью переноса на вектор $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$. Далее черточки опускаются.

На рис. 1 построены траектории частиц (16) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ в пространстве (x, y, z) при $z_0 = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ и поверхность, заданная теми же уравнениями с параметрами $t = 0..2$, $z_0 = -1..1$, которая состоит из траекторий частиц. Эта поверхность, сдвинутая на вектор (x_0, y_0), заполняет все пространство.

Так как Якобиан равен 1, то величина движущегося объема из одних и тех же частиц не изменяется со временем.

Пусть в начальный момент времени частицы заполняют куб. Частицы на поверхности куба снова окажутся на поверхности измененного куба. Поскольку любая плоскость из частиц перейдет в плоскость из тех же частиц, то куб перейдет в параллелепипед.

Точки, заполняющие куб, удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm gr, -gr \leqslant y_0 \leqslant gr, \\ -gr + z_1 &\leqslant z_0 \leqslant gr + z_1, \\ y_0 &= \pm gr, -gr \leqslant x_0 \leqslant gr, \\ -gr + z_1 &\leqslant z_0 \leqslant gr + z_1, \\ z_0 &= z_1 \pm gr, -gr \leqslant x_0 \leqslant gr, \\ -gr &\leqslant y_0 \leqslant gr, \end{aligned} \tag{17}$$

где $2gr$ — длина ребра куба; z_1 — координата по оси Oz центра куба. При $t \neq 0$ частицы перейдут в

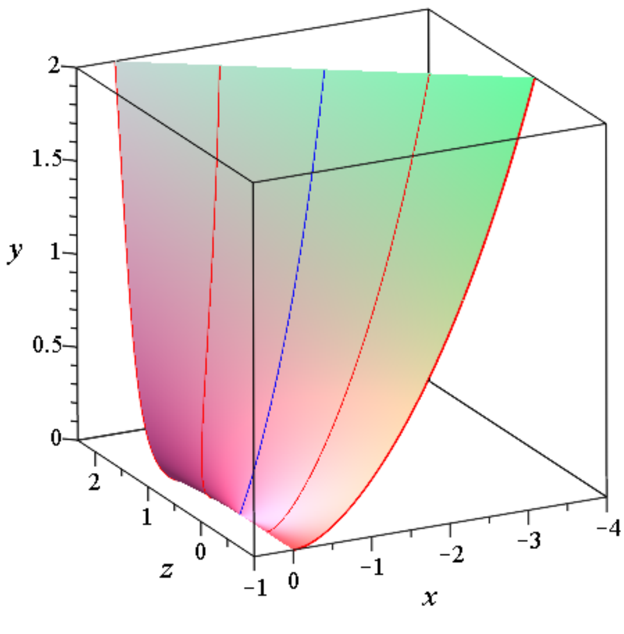

Рис. 1. Поверхность, заданная параметрически с помощью формул (16), параметры: $t = 0..2$, $z_0 = -1..1$

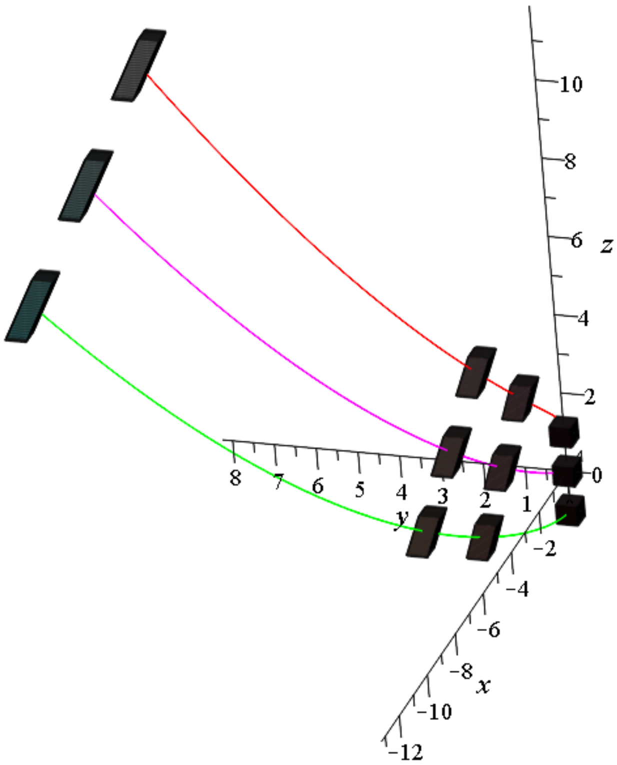

Рис. 2. Движение параллелепипедов, кривые — местоположение центра параллелепипеда; $gr = \dfrac{1}{4}$, $z_1 = \{-1, 0, 1\}$, $t = \{0, 1.5, 2, 4\}$

параллелепипед:

$$\begin{gathered}
x = -\tfrac{1}{2}t^2 + z_0 t \pm gr, y = \tfrac{1}{2}t^2 + y_0, \\
z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_0, -gr \leqslant y_0 \leqslant gr, \\
-gr + z_1 \leqslant z_0 \leqslant gr + z_1; \\
x = -\tfrac{1}{2}t^2 + z_0 t + x_0, y = \tfrac{1}{2}t^2 \pm gr, \\
z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_0, -gr \leqslant x_0 \leqslant gr, \\
-gr + z_1 \leqslant z_0 \leqslant gr + z_1; \\
x = -\tfrac{1}{2}t^2 + (z_1 \pm gr)t + x_0, y = \tfrac{1}{2}t^2 + y_0, \\
z = \tfrac{1}{6}t^3 + z_1 \pm gr, \\
-gr \leqslant x_0 \leqslant gr, -gr \leqslant y_0 \leqslant gr.
\end{gathered} \tag{18}$$

С использованием выражений (17) и (18) на рис. 2 представлены паралеллепипеды и кривые, по которым движутся центры параллелепипедов. С увеличением времени объем параллелепипеда остается постоянным, но изменяется форма: в направлении движения центра параллелепипед сужается, но вытягивается в перпендикулярном направлении.

3. Заключение

Таким образом, для точного простейшего решения уравнений гидродинамического типа с давлением, разделенным в сумму функций плотности и энтропии, найдены соотношения, задающие движение частиц в пространстве. Построены траектории движения частиц, выведены формулы для задания местонахождения частиц на границе и внутри параллелепипеда, представляющего собой движущийся объем.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. М.: РАН, 1994. Т. 58, Вып. 4. С. 30–55.

[2] Сираева Д.Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, №1. С. 94–107.

[3] Сираева Д.Т. Инвариантная подмодель ранга 2 гидродинамического типа на подалгебре из суммы переносов // Первая летняя школа-конференция «Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения»: сборник трудов (26–29 июня 2016 г.). Уфа: РИЦ БашГУ. 2016. С. 130–135.

The motion of the particles volume corresponding to invariant solution of rank 2 submodel of hydrodynamic type

Siraeva D.T.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa

Invariant submodel of rank 2 on the subalgebra consisting of the sum of transfers for hydrodynamic equations with the equation of state in the form of pressure as the sum of density and entropy functions, is presented. In terms of the Lagrangian coordinates from condition of nonhyperbolic submodel solutions depending on the four essential constants are obtained. For simplicity, we consider the solution depending on two constants. The trajectory of particles motion, the motion of parallelepiped of the same particles are studied using the Maple.

Keywords: hydrodynamic type model, invariant submodel of rank 2, exact solution, trajectory