

Стационарные режимы конвекции жидкости с гауссовской зависимостью вязкости от температуры¹

Кулешов В.С.*,**

* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

** ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа

Численно исследуется термо-гравитационная конвекция аномально термовязкой жидкости в квадратной полости с вертикальными адиабатическими и горизонтальными изотермическими стенками. Рассматривается модельная ньютоновская жидкость, в которой зависимость вязкости от температуры описывается некоторой колоколообразной функцией (гауссовской кривой). Представлена замкнутая математическая модель свободной конвекции неоднородной жидкости, основанная на уравнениях динамики сплошной среды, в предположении линейной зависимости плотности жидкости от температуры, и записанная в приближении Обербека–Буссинеска. Для расчета поля течения жидкости реализован модифицированный до второго порядка точности по времени вычислительный программный продукт, основанный на неявном методе контрольного объема и алгоритме SIMPLE, с применением многопроцессорных технологий. Изучено влияние параметров аномалии вязкости на режимы стационарных конвективных течений, вычислены интегральные коэффициенты теплоотдачи в плоской ячейке.

Ключевые слова: тепломассоперенос, свободная конвекция, аномально вязкая жидкость, термовязкая жидкость, вязкий барьер

1. Введение

В последние годы при нефтедобыче существенно увеличился рост тяжелой, высокосернистой и аномально вязкой нефти, физические свойства которой существенно отличаются от обычных ньютоновских жидкостей, а теплофизические и физико-химические параметры в достаточной мере чувствительны к изменению температуры. Важным условием создания эффективных технологий является понимание закономерностей течения рабочих сред с переменными параметрами, обеспечивающими контроль за качественными и количественными показателями.

При решении классических задач гидродинамики физические параметры (например, вязкость, теплоемкость и теплопроводность), как правило, считаются постоянными, но в реальных физических системах на процессы переноса оказывают

влияние изменения упомянутых параметров от температуры. При этом большинство моделей, описывающих зависимость вязкости от температуры, имеют монотонный (экспоненциальный) характер и называются моделями аррениусовского типа [1]. В связи с этим, вопросы по уточнению закономерностей теплообменных процессов окажутся полезными при проектировании аппаратов в нефтехимической промышленности и разработке новых технологий для добычи, транспортировки, хранения и переработки высоковязкой нефти со сложными реологическими свойствами.

Усложнения моделей, включающие немонотонную зависимость вязкости от температуры (аномально термовязкая жидкость), привели к существенным отличиям параметров течения по сравнению с классическим случаем постоянной вязкости [2–5]. Учет подобного рода эффектов, обусловленных зависимостью вязкости от температуры, представляет собой сложную задачу, которая требует применения современных вычислительных средств и методов математического моделирования.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-97060 p_поволжье_a).

В докладе [2] представлены результаты численного исследования задачи о течении несжимаемой жидкости с температурной аномалией вязкости в плоском канале с неоднородным температурным полем. Результаты исследований свидетельствуют о многообразии возможных гидродинамических эффектов. Установлено, что основной особенностью термогидродинамики аномально вязких сред является образование локализованной области — «вязкого барьера» (область повышенной вязкости), который в значительной мере способен влиять на структуру потока.

Особенности течений аномально термовязких жидкостей впервые изучены в цилиндрическом канале [3]. В данных работах представлены результаты моделирования течения жидкости с немонотонной температурной зависимостью вязкости и влияние перераспределения поля температур на картину течения и расходные характеристики.

В работе [4] рассматривались задача о термогравитационной конвекции жидкости в плоской ячейке с немонотонной зависимостью вязкости от температуры и влияние квадратичной зависимости вязкости от температуры с параметром, характеризующим отношение максимальной и минимальной вязкостей на глобальную картину течения и теплообмен на изотермических стенках. Обнаружено существование периодических и квазипериодических течений.

Ранее авторами исследовалась задача о естественной конвекции аномально термовязкой жидкости в квадратной ячейке, подогреваемой снизу, где для проведения вычислительных экспериментов была рассмотрена модельная ньютоновская жидкость, в которой зависимость вязкости от температуры описывается некоторой колоколообразной функцией (гауссовской кривой) [5]. Эта функция в общих чертах аппроксимирует соответствующие зависимости высоковязкой нефти, характерной для Тимано-Печерских, Ромашенской и ряда других нефтяных месторождений Поволжья и Казахстана [6], и хорошо очищенной жидкой серы [7] с учетом двух параметров аномалии: A — показывает отношение максимальной и минимальной вязкостей и B — характеризует степень заполненности заданного температурного интервала [2]. В данных работах отмечалось влияние «вязкого барьера» на картину течений. Было установлено, что, например, при $B = 10^3$ и малых значениях параметра A ($1 \leq A < 300$) наблюдается стационарный режим конвекции. С дальнейшим же увеличением параметра A система теряет устойчивость, и стационарный режим сменяется периодическим, который наблюдается в диапазоне $300 \leq A < 3450$.

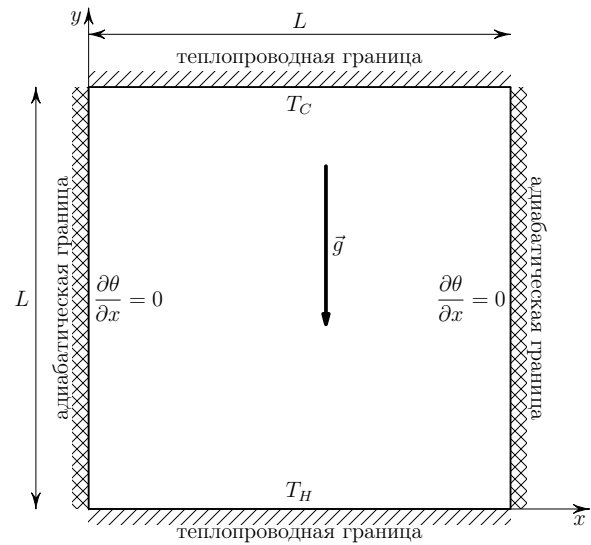


Рис. 1. Схема расчетной области

Цель настоящей работы заключается в проведении численных экспериментов для изучения особенностей конвективных течений аномально термовязкой жидкости в квадратной полости с вертикальными адиабатическими и горизонтальными изотермическими стенками. Исследуется влияние гауссовской функции вязкости от температуры при $A \geq 3450$ на режимы свободной конвекции.

2. Постановка задачи и математическая модель

Исследуется термогравитационное течение жидкости в квадратной полости со стороной L (рис. 1). На всех стенках области для продольной и поперечной составляющих скорости задаются условия прилипания. Нижняя и верхняя границы области считаются изотермическими: на нижней стенке поддерживается постоянная температура T_H (hot — горячая стенка), а на верхней — T_C (cold — холодная стенка), при этом считается $T_H > T_C$; две вертикальные стенки считаются адиабатическими; рассматриваемая жидкость является несжимаемой и ньютоновской с температурной аномалией вязкости.

Система нелинейных дифференциальных уравнений тепловой конвекции, записанная в приближении Обербека–Буссинеска [8] и описывающая конвективное движение жидкости, находящейся в однородном поле силы тяжести, в двумерном случае может быть представлена в безразмерном виде и включает в себя следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{div}(\mu \nabla \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{g} \theta}{|\mathbf{g}|}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \theta = (\text{Pr} \cdot \text{Ra})^{-\frac{1}{2}} \Delta \theta, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости в прямоугольной ортогональной системе координат; t — время; p — отклонение от гидростатического давления; $\mu = \mu(\theta)$ — динамическая вязкость жидкости; θ — безразмерная температура; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; Pr и Ra — безразмерные числа Прандтля и Рэлея соответственно; ∇ — оператор набла; $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

В настоящей работе рассматривается движение модельной жидкости, вязкость которой описывается гауссовской кривой и представляется в следующем безразмерном виде:

$$\mu(\theta) = 1 + Ae^{-B\theta^2}, \quad (4)$$

где A и B — параметры аномалии жидкости, при этом параметр $A = (\mu_{\max}/\mu_{\min}) - 1$ показывает отношение максимального и минимального значений вязкости в заданном диапазоне изменения температуры $[T_C : T_H]$, а параметр B характеризует степень заполненности заданного температурного интервала.

Переход от размерных к безразмерным величинам в системе уравнений (1)–(4) осуществляется при помощи следующих соотношений (звездочкой помечены размерные величины): L — линейный размер области; $v_* = (\mathbf{g}\beta L \Delta T)^{\frac{1}{2}}$ — скорость; $t_* = L/v_*$ — время; $p_* = \rho v_*^2$ — давление; $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$; числа $\text{Ra} = \frac{\mathbf{g}\beta \Delta T L^3}{\alpha \nu}$ определяются соответственно [8, 9]. Здесь ν , α , β , ρ — кинематическая вязкость, температуропроводность, коэффициент теплового расширения и плотность соответственно, определяемые при равновесной температуре T_0 ; $\Delta T = T_H - T_C$. Безразмерная температура определяется как: $\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C}$, $T_0 = (T_H + T_C)/2$. Следует отметить, что теплофизические переменные, за исключением вязкости, не зависят от температуры.

Рассматриваемая задача (1)–(4) в первоначальный момент времени находится в невозмущенном состоянии и определяется при средней температуре T_0 , которой соответствует безразмерная температура θ_0 :

$$\mathbf{v}|_{t=0}, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 = 0.$$

На границах расчетной области для вектора скорости задается условие прилипания ($\mathbf{v} = 0$), для температуры на адиабатических границах — условия Неймана $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \right)$, где \mathbf{n} — вектор нормали,

а на изотермических — постоянная температура:

$$\theta|_{y=0} = \theta_H = \frac{1}{2}, \quad \theta|_{y=1} = \theta_H = -\frac{1}{2}.$$

3. Численный метод

Для численного решения сформулированной задачи используется предложенный в работе [10] неявный метод контрольного объема с применением процедуры SIMPLE для расчета поля давления. В вычислениях используется двухточечная аппроксимация нестационарных членов уравнений (2)–(3), что обеспечивает второй порядок точности по времени [11]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{3\varphi^{k+1} - 4\varphi^k + \varphi^{k-1}}{2\Delta t},$$

где индекс $k+1$ обозначает новые значения физической переменной $\varphi = (\mathbf{v}, \theta)$; k — в текущий и $k-1$ — в предыдущий момент времени.

Физические величины на твердой поверхности аппроксимируются с помощью полинома второй степени и, соответственно, имеют второй порядок точности по пространственной координате, а для определения значений физических переменных на гранях контрольного объема применяются кубические сплайны [12].

Таким образом численная схема обладает вторым порядком как по пространственной координате, так и по времени.

В ходе дискретизации системы дифференциальных уравнений (1)–(3) возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений, которые в двумерном случае в матричном представлении имеют пятидиагональный вид. Полученные матрицы имеют сильно разреженные структуры, поэтому для их решения применяется сторонняя высокопроизводительная библиотека решателей Hupre (High performance preconditioners) [13]. При реализации программного продукта применялся метод AMG (algebraic multigrid method) [14].

Разработанный вычислительный код был протестирован на классической задаче Рэлея–Бенара [8, 9] в квадратной полости для жидкости с постоянной вязкостью. Полученные результаты вычислений были сопоставлены с «эталонными» решениями (Benchmark solution), представленными в работе [15]. Вычисления проводились в диапазоне чисел $\text{Ra} = 10^4; 10^5; 10^6$ и при фиксированном числе Прандтля $\text{Pr} = 0.71$ на равномерных сетках размерами 50×50 , 100×100 , 200×200 и при шаге интегрирования по времени $\Delta t = 10^{-4}$.

Результаты тестовых вычислительных экспериментов представлены в табл. 1–3. Здесь отобра-

Таблица 1. Результаты вычислений для $Ra = 10^4$

Характеристика	Результаты измерений			Эталон [15]
	50 × 50	100 × 100	200 × 200	
Nu_H	2.1558	2.1558	2.1558	2.1581
Nu_C	2.1558	2.1558	2.1558	2.1580
u_{max}	0.25104	0.25201	0.25206	0.25228
v_{max}	0.26245	0.26333	0.26360	0.26369
$y(u_{max})$	0.81	0.805	0.8025	0.8023
$x(v_{max})$	0.83	0.825	0.8275	0.8263

Таблица 2. Результаты вычислений для $Ra = 10^5$

Характеристика	Результаты измерений			Эталон [15]
	50 × 50	100 × 100	200 × 200	
Nu_H	3.9024	3.9078	3.9098	3.9103
Nu_C	3.9024	3.9078	3.9098	3.9103
u_{max}	0.33217	0.34088	0.34343	0.34434
v_{max}	0.36533	0.37296	0.37496	0.37569
$y(u_{max})$	0.87	0.865	0.8625	0.8636
$x(v_{max})$	0.89	0.895	0.8975	0.8973

Таблица 3. Результаты вычислений для $Ra = 10^6$

Характеристика	Результаты измерений			Эталон [15]
	50 × 50	100 × 100	200 × 200	
Nu_H	6.516	6.3944	6.3340	6.3092
Nu_C	6.516	6.3944	6.3340	6.3092
u_{max}	0.32140	0.35012	0.36484	0.37088
v_{max}	0.37137	0.39262	0.40248	0.40600
$y(u_{max})$	0.89	0.905	0.9025	0.9036
$x(v_{max})$	0.93	0.935	0.9375	0.9359

жено количественное сравнение основных характеристик течения, таких как: максимальное значение продольной составляющей вектора скорости u_{max} в центральном вертикальном сечении области при $x = 0.5$; максимальное значение поперечной составляющей вектора скорости v_{max} в центральном горизонтальном сечении при $y = 0.5$; числа Нуссельта Nu на изотермических стенках, показывающие отношение потока тепла за счет конвекции к потоку тепла за счет теплопроводности:

$$Nu_H = - \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx, \quad Nu_C = - \int_0^1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} dx.$$

Результаты тестовых расчетов показали, что разработанный вычислительный продукт позволя-

ет получить достоверные решения для поставленной задачи на равномерной сетке размером 100×100 .

4. Результаты вычислительных экспериментов

Ниже приводятся результаты численного моделирования термо-гравитационной конвекции аномально термовязкой жидкости, которые были получены на суперкомпьютере Уфимского государственного авиационного технического университета [16] на сетке размером 100×100 узлов и шагом интегрирования по времени $\Delta t = 10^{-4}$.

В рамках настоящего исследования было установлено, что стационарный режим конвекции аномально термовязкой жидкости наблюдается при значении параметра $A \geq 3450$. Также в ходе проведения вычислительных экспериментов было показано влияние так называемого «вязкого барьера» (выделенной области максимальной вязкости) на структуру течения (рис. 2–5), который в заданной области параметров имеет зигзагообразную форму.

На рис. 2 представлены основные характеристики течения жидкости: изолинии функции тока (рис. 2(а)), изолинии поля температуры (рис. 2(б)) и распределение вязкости (рис. 2(в)), здесь наиболее контрастный цвет соответствует максимальному значению вязкости, а менее контрастный — минимальному) в квадратной полости. На рис. 2(а) отчетливо видно сложное многовихревое течение, при этом сохраняется основное циркуляционное течение, которое является огибающим контуром для более мелких вторичных вихрей. Также следует отметить, что эти вихри располагаются по разные стороны от «вязкого барьера», который, в свою очередь, препятствует их объединению. При этом, как показано на рис. 3, с ростом параметра A наблюдается увеличение вторичных вихрей с сохранением положения и размеров вихрей, расположенных примерно на высоте $y \approx 0.2$ и $y \approx 0.8$, а также вихрей, образовавшихся в углах полости.

На рис. 4 представлено распределение продольной составляющей вектора скорости в центральном вертикальном сечении $x = 0.5$ (рис. 4(а)), поперечной — в центральном горизонтальном сечении $y = 0.5$ (рис. 4(б)) и распределение температуры в центральном вертикальном сечении $x = 0.5$ (рис. 4(в)). Видно, что при заданных параметрах аномалии A наблюдается сильное отклонение потока в зоне повышенной вязкости как для продольной, так и для поперечной компонент скорости. Если в классическом случае (постоянная вязкость) осевое распределение продольной и попереч-

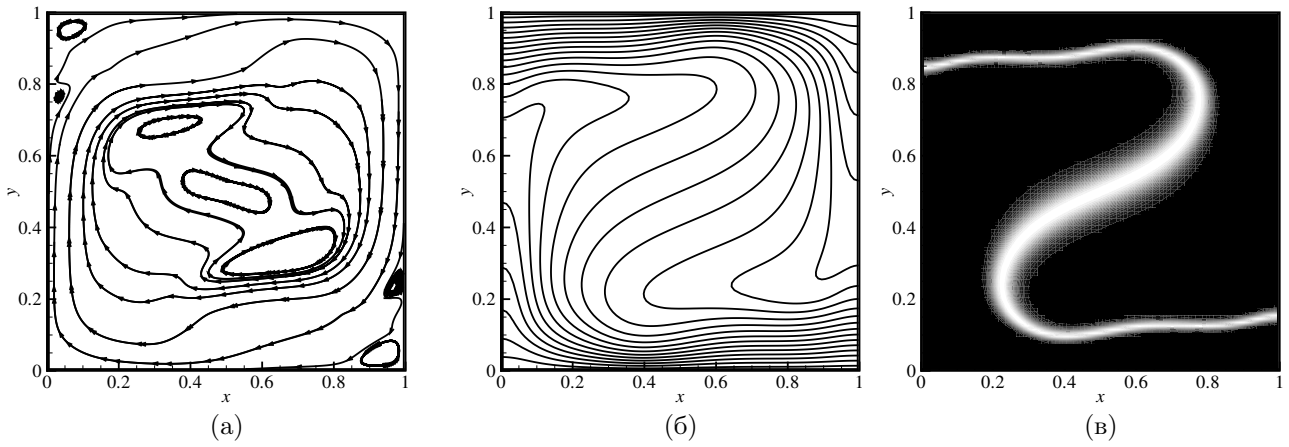


Рис. 2. Основные параметры потока при $A = 4000$, $B = 10^3$, $Pr = 0.1$, $Ra = 10^6$: (а) — изолинии функции тока, (б) — изолинии температуры, (в) — распределение вязкости

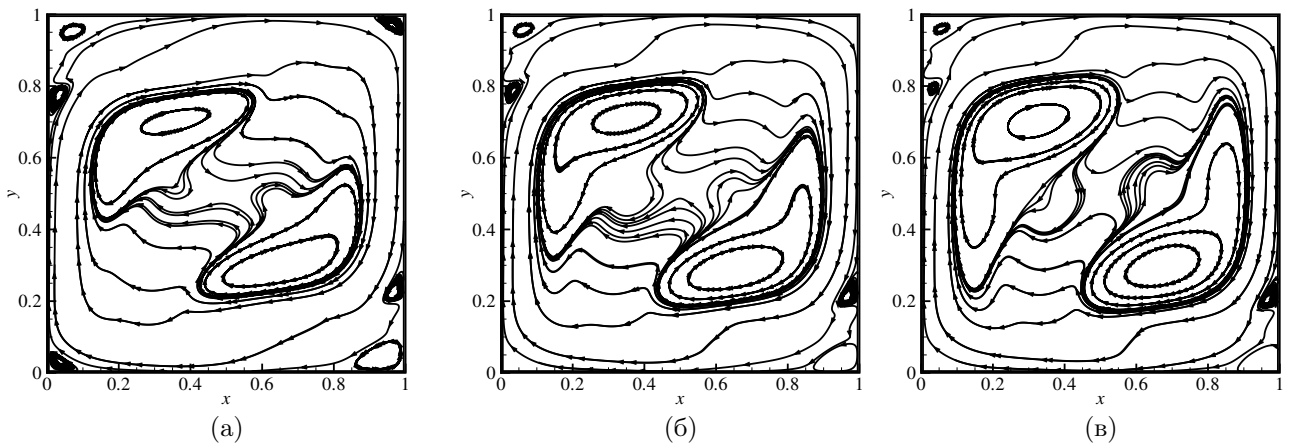


Рис. 3. Изолинии функции тока при $B = 10^3$, $Pr = 0.1$, $Ra = 10^6$: (а) — $A = 6 \cdot 10^3$, (б) — $A = 8 \cdot 10^3$, (в) — $A = 10^4$

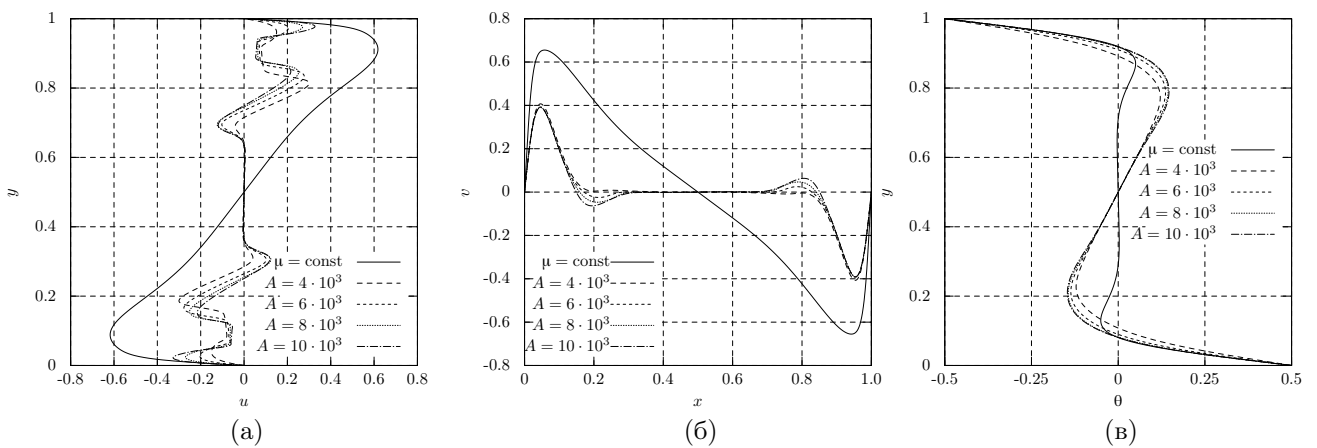


Рис. 4. Эпюры продольной составляющей вектора скорости (а), поперечной (б) и температуры (в)

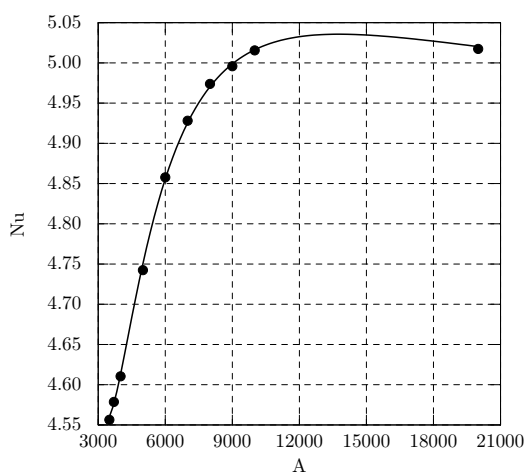


Рис. 5. Зависимость числа Нуссельта от амплитуды вязкости

ной компонент скорости имеет максимум на небольших расстояниях от границы области с дальнейшим их линейным падением в центральной части, то в случае с жидкостью, вязкость у которой описывается гауссовской кривой, наблюдается существенное падение абсолютного значения максимума для обоих компонент вектора скорости с торможением потока в области повышенной вязкости. Также, если для постоянной вязкости наблюдается один максимум скорости, то в случае аномальной жидкости — уже три для продольной компоненты и два для поперечной. При этом, с ростом параметра A , уменьшаются максимальные значения скорости с сохранением профиля. Что же касается распределения температуры (рис. 3(в)), то наблюдается совпадения профиля возле верхней и нижней границ до зоны повышенной вязкости. Следует отметить, что в случае термовязкой жидкости, хотя и максимальная продольная компонента скорости меньше, чем для постоянной вязкости, наблюдается более сильный прогрев центральной области с линейным профилем температуры.

На рис. 5 представлено изменение среднего по всей области числа Нуссельта, определяемое как:

$$Nu = \int_0^1 \int_0^1 \left[(\text{Pr} \cdot \text{Ra})^{\frac{1}{2}} v \cdot \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] dx dy,$$

где сплошная линия соответствует аппроксимации значений чисел Нуссельта, полученных в результате вычислительных экспериментов кубической гиперболой, при этом наблюдается немонотонное их изменение в заданном диапазоне.

5. Заключение

Представлены результаты численного моделирования термо-гравитационной конвекции аномальной жидкости в квадратной полости с вертикальными адиабатическими и горизонтальными изотермическими стенками. Рассматривается модельная ньютоновская жидкость, в которой зависимость вязкости от температуры описывается некоторой колоколообразной функцией (гауссовской кривой). Результаты получены с помощью реализованного до второго порядка точности по времени вычислительного программного продукта, основанного на неявном методе контрольного объема и алгоритме SIMPLE, с применением многопроцессорных технологий.

Показано влияние параметров аномалии вязкости на режимы конвективных течений и интегральные коэффициенты теплоотдачи в ячейке. В рамках проведения вычислительных экспериментов были обнаружены совершенно новые стационарные режимы конвекции, со сложной многовихревой структурой течения. Выявлено немонотонное изменение чисел Нуссельта в исследуемом диапазоне, которые достаточно хорошо аппроксимируются кубической гиперболой. Установлено, что стационарный режим конвекции наблюдается при больших значениях параметра $A \geq 3450$. Также в ходе проведения вычислительных экспериментов было показано влияние «вязкого барьера» на структуру течения, который в заданной области параметров имеет зигзагообразную форму.

Список литературы

- [1] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Ленинград: Наука. 1975. 592 с.
- [2] Урманчев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
- [3] Хизбуллина С.Ф. Численное исследование течения жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры // Вестник Башкирского университета. 2006. № 2. С. 22–25.
- [4] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сиб. журн. индустр. матем. 2005. Т. 8, № 4. С. 51–59.
- [5] Кулешов В.С., Моисеев К.В. Численное моделирование конвективных течений аномально термовязко жидкости // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 2(72). С. 74–80.

- [6] Шаммазов А.М., Кутуков С.Е. и др. Комплексное исследование релогических и адгезионных свойств нефтей в диапазоне температур кристаллизации // Известия ВУЗов. Нефть и газ. 1998. № 4. С. 63–73.
- [7] Bacon R.F., Fanelli R. The viscosity of sulfur // Journal of the American Chemical Society. 1943. Vol. 65, No 4. P. 639–648.
- [8] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972. 392 с.
- [9] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 248 с.
- [10] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергофизмат. 1984. 152 с.
- [11] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир. 1990. 384 с.
- [12] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов. М.: Наука. Гл.ред. физ-мат. лит. 1989. 432 с.
- [13] Библиотека решателей High performance preconditioners. Адрес доступа: http://computation.llnl.gov/project/linear_solvers/ (дата обращения 1.08.2016). Biblioteka reshatelei (High performance preconditioners). Available at: http://computation.llnl.gov/project/linear_solvers/ (accessed 1.08.2016).
- [14] Falgout Robert D. An introduction to algebraic Multigrid // Computing in Science and Engg. 2006. Vol. 8, No 6. Pp. 24–33.
- [15] N. Ouertatani et al. Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh – Benard convection in an enclosure // C. R. Mecanique. 2008. Vol. 336, No 5. Pp. 464–470.
- [16] Вычислительный кластер УГАТУ. Адрес доступа: <http://www.ufa-rb.ru/supercomputer/> (дата обращения 1.08.2016).

Stationary fluid convection modes with a Gaussian viscosity dependence of temperature

Kuleshov V.S.**

* Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

** LLC "RN-UfanipiNefit", Ufa

The results of a numerical modeling of thermo-gravitational convection of abnormally thermo-viscous fluid in a closed square cavity with two vertical adiabatic walls and two horizontal isothermal walls are presented. A model Newtonian liquid for which the dependence of viscosity on temperature is described by a bell function (Gaussian curve) is considered. The natural convection of inhomogeneous liquid is described by the closed mathematical model based on the continuous mechanics equations written in Oberbeck-Boussinesq approximation, where the fluid density is a linear function of temperature. To simulate the fluid flow dynamics, the modified computer code based on the implicit finite volume method and SIMPLE-type algorithm with the second-order temporal accuracy is realized using multiprocessor technology. The effect of the viscosity abnormality on stationary modes of convective flows are studied, the integral heat transfer coefficients in a flat cell are calculated.

Keywords: heat transfer, mass transfer, natural convection, anomalous viscosity of fluid, thermoviscous fluid, viscous barrier

