

О законах сохранения для вязкой жидкости

Хабилов С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Уравнения движения вязкой жидкости имеют дивергентный вид законов сохранения и допускают бесконечномерную алгебру Ли точечных симметрий. Канонические операторы алгебры порождают законы сохранения первого порядка. Это проверено для базисных операторов допускаемой алгебры. Любой закон сохранения может быть получен действием некоторого канонического оператора на нетривиальный закон сохранения. Вычислены канонические операторы законов сохранения нулевого порядка. Поставлена задача о вычислении канонических операторов законов сохранения первого порядка.

Ключевые слова: вязкая жидкость, канонический оператор, закон сохранения

1. Введение

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (Навье–Стокс)

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}, \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

имеют дифференциальное следствие

$$\Delta p + \text{tr} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \right)^2 = 0 \quad (2)$$

и записываются в дивергентном виде закона сохранения

$$(\vec{K} \cdot \vec{u})_t + \nabla \cdot (\vec{u}(\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + p\vec{K} - \nu \nabla(\vec{K} \cdot \vec{u})) = 0, \quad (3)$$

где $\vec{K} = (K^1, K^2, K^3)$, K^0 — набор произвольных постоянных.

Вектор закона сохранения имеет координаты:

$$C^0 = \vec{K} \cdot \vec{u}, \vec{C} = \vec{u}(\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + p\vec{K} - \nu \Delta(\vec{K} \cdot \vec{u}).$$

Система (1) допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов с базисом [1]:

$X_{10} = \partial_t$ — перенос по времени;
 $X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v$, $X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w$,
 $X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u$ — вращения в координатных плоскостях декартовой системы;
 $X_{11} = 2t\partial_t + \vec{x}\partial_{\vec{x}} - \vec{u}\partial_{\vec{u}} - 2p\partial_p$ — растяжение;
 $\langle \varphi \rangle_0 = \varphi(t)\partial_p$ — добавление к давлению функции

времени;

$\langle \psi_1 \rangle_1 = \psi_1(t)\partial_x + \dot{\psi}_1\partial_u - x\ddot{\psi}_1\partial_p$, $\langle \psi_2 \rangle_2 = \psi_2(t)\partial_y + \dot{\psi}_2\partial_v - y\ddot{\psi}_2\partial_p$, $\langle \psi_3 \rangle_3 = \psi_3(t)\partial_z + \dot{\psi}_3\partial_w - z\ddot{\psi}_3\partial_p$ — произвольное движение начала системы координат. При этом $\langle 1 \rangle_i = X_i$, $i = 1, 2, 3$ — переносы по декартовым осям; $\langle t \rangle_i = X_{3+i}$, $i = 1, 2, 3$ — галилеевы переносы. Операторы $X_1, \dots, X_{10}$ образуют алгебру Ли группы Галилея, относительно которой любая нерелятивистская модель механики сплошной среды инвариантна.

Оператор вида

$$X = \xi^t \partial_t + \xi^{\vec{x}} \partial_{\vec{x}} + \xi^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}} + \xi^p \partial_p$$

продолжается на производные любого порядка X_∞ [1].

Канонический оператор имеет вид:

$$\bar{X} = X_\infty - \xi^t \partial_t - \xi^{\vec{x}} \partial_{\vec{x}} = \bar{\xi}^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}} + \bar{\xi}^p \partial_p + D_t \bar{\xi}^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}_t} + D_t \bar{\xi}^p \partial_{p_t} + D_{x^i} \bar{\xi}^{\vec{u}} \partial_{u_{x^i}} + D_{\vec{x}} \bar{\xi}^p \partial_{p_{\vec{x}}} + \dots,$$

где $D_t, D_{\vec{x}}$ — операторы полного дифференцирования.

Доказано [2], что действие каноническим оператором на вектор закона сохранения дает новый вектор закона сохранения, но он может быть тривиальным.

Закон сохранения для системы (1)

$$\left(D_t C^0 + D_{\vec{x}} \cdot \vec{C} \right) \Big|_{(1)} = 0 \quad (4)$$

называется тривиальным, если выполнено тождество

$$D_t C^0 \Big|_{(1)} + D_{\vec{x}} \cdot \vec{C} \Big|_{(1)} = 0. \quad (5)$$

Переход на многообразие (1) подразумевает использование следствия (2) и всех других дифференциальных следствий.

В силу леммы о коммутаторе [1] любой закон сохранения можно получить действием на вектор нетривиального закона сохранения некоторым каноническим оператором законов сохранения

$$C_*^0 = \bar{X} C^0, \vec{C}_* = \bar{X} \vec{C}, \quad (6)$$

среди которых будут канонические операторы, допускаемые системой (1) [2]. Уравнения для нахождения операторов законов сохранения имеет вид [1]:

$$\left(\bar{X} D_t C^0 + \bar{X} D_{\vec{x}} \vec{C} \right) \Big|_{(1)} = 0. \quad (7)$$

В работе проверено, что допускаемые системой (1) операторы порождают как тривиальные, так и нетривиальные законы сохранения. Найдены все операторы законов сохранения нулевого порядка, координаты которых не зависят от производных. Поставлена задача нахождения всех операторов законов сохранения первого порядка.

Физические приложения законов сохранения можно найти в работе [3].

2. Законы сохранения, полученные с помощью допускаемых операторов

Канонический оператор вращения в плоскости y, z таков

$$\begin{aligned} \bar{X}_7 = X_{7\infty} + z D_y - y D_z = & (zu_y - yu_z) \partial_u + \\ & + (-w + zv_y - yv_z) \partial_v + (v + zw_y - zw_z) \partial_w + \\ & + (zp_y - yp_z) \partial_p + D_x (zu_y - yu_z) \partial_{u_x} + \dots \end{aligned}$$

Для закона сохранения (3) с $K^0 = 1, \vec{K} = 0$ оператор $\bar{X}_7$ дает тривиальный закон сохранения вида (5):

$$\begin{aligned} D_x (zu_y - yu_z) + D_y (-w + zv_y - yv_z) + \\ + D_z (v + zw_y - yw_z) = D_x (zu_y - yu_z) + \\ + D_y (-w - z(u_x + w_z) - yv_z) + \\ + D_z (v + zw_y + y(u_x + v_y)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Для закона сохранения (3) с $K^0 = 1, K^1 = 1, K^2 = K^3 = 0$ оператор $\bar{X}_7$ дает закон сохранения

$$\begin{aligned} D_t (zu_y - yu_z) + D_x (2u(zu_y - yu_z) - \\ - \mathbf{v}(zu_{xy} - yu_{xz} + zp_y - yp_z)) + D_y (v(zu_y - yu_z) - \\ - u(-w + zv_y - yv_z) - \mathbf{v}(-u_z + zu_{yy} - yu_{yz})) + \\ + D_z (u(v + zw_y - yw_z) + w(zu_y - yu_z) - \\ - \mathbf{v}(u_y + zu_{yz} - yu_{zz})) = L_1 (D_t u + D_x (u^2 + p - \mathbf{v}u_x) + \\ + D_y (uv - \mathbf{v}u_y) + D_z (uw - \mathbf{v}u_z)) \Big|_{(1)} = 0, \end{aligned}$$

где оператор $L_1 = z D_y - y D_z$.

Для закона сохранения (3) с $K^0 = K^1 = K^2 = 0, K^3 = 1$ оператор $\bar{X}_7$ дает закон сохранения

$$\begin{aligned} D_t (-w + zv_y - yv_z) + D_x (u(-w + zv_y - yv_z) + \\ + v(zu_y - yu_z) - \mathbf{v}(-w_x + zv_{xy} - yv_{xx})) + \\ + D_y (2v(-w + zv_y - yv_z) + zp_y - yp_z - \\ - \mathbf{v}(-w_z + zv_{yy} - yv_{yz} - v_z)) + D_z (v(v + zw_y - yw_z) + \\ + v + w(-w + zv_y - yv_z) - \mathbf{v}(-w_z + v_y + \\ + zv_{yz} - yv_{zz})) = L_1 (D_t v + D_x (uv - \mathbf{v}v_x) + D_y (v^2 + \\ + p - \mathbf{v}v_y) + D_z (vw - \mathbf{v}v_z)) - D_t u D_x (uw - \mathbf{v}u_x) - \\ - D_y (v_w - \mathbf{v}u_y) - D_z (w^2 + p - \mathbf{v}w_z) \Big|_{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Для закона сохранения (3) с $K^0 = K^1 = K^2 = 0, K^3 = 1$ оператор $\bar{X}_7$ дает закон сохранения

$$\begin{aligned} D_t (v + zw_y - yw_z) + D_x (u(v + zw_y - yw_z) + \\ + w(zu_y - yu_z) - \mathbf{v}(v_x + zw_{xy} - yw_{xz})) + \\ + D_y (v(v + zw_y - yw_z) + w(-w + zv_y - yv_z) - \\ - \mathbf{v}(v_y + zw_{yy} - yw_{yz} - w_z)) + D_z (2w(v + zw_y - yw_z) + \\ + zp_y - yp_z - \mathbf{v}(v_z + w_y + zw_{yz} - yw_{zz})) = \\ = L_1 (D_t w + D_x (uw - \mathbf{v}v_y) + D_y (vw - \mathbf{v}u_y) + \\ + D_z (w^2 + p - \mathbf{v}w_z)) \Big|_{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Линейная комбинация полученных равенств дает нетривиальный закон сохранения для произвольного вектора $\vec{K}$ с точностью до тривиального слагаемого.

Аналогичные равенства справедливы для канонических допускаемых операторов $\bar{X}_8, \bar{X}_9$.

Для оператора $\bar{X}_{10} = -u_t \partial_u - v_t \partial_v - w_t \partial_w - p_t \partial_p + \dots$ справедлив закон сохранения

$$D_t \bar{X}_{10} C^0 + \nabla \cdot (\bar{X} \vec{C}) = -D_t (D_t C^0 + \nabla \cdot \vec{C}) \Big|_{(1)} = 0.$$

Другие канонические допускаемые операторы производят законы сохранения в силу следующих тождеств:

$$\begin{aligned} D_t \bar{X}_{11} C^0 + \nabla \cdot (\bar{X}_{11} \vec{C}) = K^0 \nabla \cdot \vec{u} - \\ - (3 + 2t D_t + \vec{x} \cdot D_{\vec{x}}) (D_t C^0 + \nabla \cdot \vec{C}), \end{aligned}$$

где $\bar{X}_{11} = -(\vec{u} + X_{11} \vec{u}) \partial_{\vec{u}} - (2p + X_{11} p) \partial_p + \dots$; $D_t \langle \bar{\Psi} \rangle_1 C^0 + D_{\vec{x}} \cdot (\langle \bar{\Psi} \rangle_1 \vec{C}) = \dot{\Psi} K^1 \nabla \cdot \vec{u} - \Psi D_x (D_t C^0 + \nabla \cdot \vec{C})$, где $\langle \bar{\Psi} \rangle_1 = (\dot{\Psi} - \Psi u_x) \partial_u - \Psi v_x \partial_v - \Psi w_x \partial_w - (x \ddot{\Psi} + \Psi p_x) \partial_p + \dots$ и аналогичные равенства для операторов $\langle \bar{\Psi} \rangle_2, \langle \bar{\Psi} \rangle_3$.

3. Законы сохранения, полученные с помощью операторов нулевого порядка

Операторы нулевого порядка, порождающие законы сохранения разыскиваются в виде:

$$\bar{X} = \xi^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}} + \xi^p \partial_p + D_{\vec{x}} \xi^p \partial_{\nabla p} + D_t \xi^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}_t} + D_{x^i} \xi^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}_i} + \dots, \quad (8)$$

где координаты оператора $\xi^{\vec{u}}, \xi^p$ зависят от переменных $t, \vec{x}, p, \vec{u}$.

Справедливо тождество

$$\begin{aligned} \bar{X} \left(\vec{K} \cdot \vec{u}_t + \nabla \left(\vec{u} (\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + p \vec{K} - \nu \nabla (\vec{K} \cdot \vec{u}) \right) \right) = \\ = D_{\vec{x}} \vec{\sigma} + (D_t + \vec{u} \cdot D_{\vec{x}} - \nu D_{\vec{x}}^2 + \nabla \cdot \vec{u}) \sigma^0, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\sigma^0 = \vec{K} \cdot \xi^{\vec{u}}, \vec{\sigma} = \xi^{\vec{u}} (\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + \vec{K} \xi^p. \quad (9)$$

Достаточно найти вектор $\sigma^0, \vec{\sigma}$.

Уравнение (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{x^i}^i + \sigma_p^i p_i + \sigma_{u^k}^i u_i^k + \sigma_t^0 + \sigma_p^0 p_t - \sigma_{u^k}^0 p_k + \\ + u^j (\sigma_{x^j}^0 + \sigma_p^0 p_j) - \nu (-\sigma_p^0 u_j^k u_k^j + \Delta \sigma^0 + \\ + 2\sigma_{x^i p}^0 p_i + 2\sigma_{x^j u^k}^0 u_j^k + \sigma_{pp}^0 p_i p_j + 2\nu_{pu^k}^0 u_j^k p_j + \\ + \sigma_{u^k u^k}^0 u_j^k u_j^k + 2\sigma_{u^k u^l}^0 u_j^k u_j^l) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Функции $\sigma^0, \vec{\sigma}$ не зависят от производных, поэтому в равенстве (10) коэффициенты при независимых производных зануляются (расщепление):

$$p_t : \sigma_p^0 = 0, p_i : \sigma_p^i = \sigma_{u^i}^0, \sum_j u_j^k u_j^l : \sigma_{u^k u^l}^0 = 0,$$

$$u_i^k (k \neq i) : \sigma_{u^k}^i = 2\nu \sigma_{x^i u^k}^0,$$

$$u_i^i : \sigma_{u^1}^1 - 2\nu \sigma_{x^1 u^1}^0 = \sigma_{u^2}^2 - 2\nu \sigma_{x^2 u^2}^0 = \sigma_{u^3}^3 - 2\nu \sigma_{x^3 u^3}^0 = k.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \sigma^0 = \vec{a}(t, \vec{x}) \cdot \vec{u} + a^0(t, \vec{x}), \sigma^i = a^i p + k(t, \vec{x}) u^i + \\ + 2\nu \vec{u} \cdot \vec{a}_i + b^i(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Остаток равенства (9) таков

$$\sigma_{x^i}^i + \sigma_t^0 + u^j \sigma_{x^j}^0 - \nu \Delta \sigma^0 = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $p, \vec{u}$, получим:

$$\vec{a}_j = 0, \vec{a}_t + \nabla k + \nabla a^0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{b} + a_t^0 = \nu \Delta a^0.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}(t), a^0 = \alpha(t) - k - \vec{a}' \cdot \vec{x}, \\ k_t - \nu \Delta k = \nabla \cdot \vec{b} + \alpha' - \vec{a}'' \cdot \vec{x}, \\ \sigma^0 = \vec{a} \cdot \vec{u} + k - \vec{a}' \cdot \vec{x} + \alpha(t), \\ \vec{\sigma} = p \vec{a} + k \vec{u} + \vec{b}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (10) определяют координаты оператора (8)

$$\vec{K}^2 \xi^p = -\sigma^0 (\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + \vec{K} \cdot \vec{\sigma},$$

$$(\xi^{\vec{u}} - \vec{K} \vec{K}^{-2} \sigma^0) (\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) = \vec{\sigma} - \vec{K} \vec{K}^{-2} (\vec{K} \cdot \vec{\sigma}).$$

Векторы законов сохранения вычисляются по формуле (7)

$$C_*^0 = \bar{X} (\vec{K} \cdot \vec{u}) = \sigma^0,$$

$$\vec{C}_* = \bar{X} (\vec{u} (\vec{K} \cdot \vec{u} + K^0) + p \vec{K} - \nu \nabla (\vec{K} \cdot \vec{u})) = \vec{\sigma} + \vec{u} \sigma^0 - \nu D_{\vec{x}} \sigma^0.$$

Легко проверить, что этот вектор задает нетривиальный закон сохранения для уравнений (1) в силу равенств (11). С точностью до тривиальных слагаемых закон сохранения принимает вид:

$$D_t (\vec{a} \cdot \vec{u}) + D_{\vec{x}} (p \vec{a} + \vec{u} (\vec{a} \cdot \vec{u} - \vec{a}' \cdot \vec{x}) - \nu \nabla (\vec{a} \cdot \vec{u})) = 0,$$

где $\vec{a}(t)$ — произвольная функция.

4. Об операторах законов сохранения первого порядка

Операторы законов сохранения первого порядка имеют вид (8), где координаты $\xi^p, \xi^{\vec{u}}$ зависят от переменных $t, \vec{x}, p, \vec{u}, \nabla p, \vec{u}_i, p_t, \vec{u}_t$. В силу равенств (9) достаточно вычислить вектор $\sigma^0, \vec{\sigma}$. Равенство (7) должно выполняться в силу дифференциальных следствий уравнений (1) и (2):

$$u_{ij}^i = 0, u_{ijk}^i = 0, \Delta p_i = -2u_j^k u_k^j i,$$

$$\vec{u}_{ti} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_i - \nabla p_i + \nu \Delta \vec{u}_i - (\vec{u}_i \cdot \nabla) \vec{u},$$

$$\begin{aligned} \Delta u_t^k = -(\vec{u} \cdot \nabla) \Delta u^k - 2(\vec{u}_i \cdot \nabla) u_i^k - (\Delta \vec{u} \cdot \nabla) u^k + \\ + 2u_{jk}^i u_j^i + \nu \Delta^2 u^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_{tt} = u^j u^l \vec{u}_{lj} + u^j \nabla p_j - 2\nu u^j \Delta \vec{u}_j + 2u^j u_j^l \vec{u}_l + p_l \vec{u}_l - \\ - 2\nu \Delta u^l \vec{u}_l - \nabla p_t + \nu^2 \Delta^2 \vec{u} + \nu \nabla (u_j^k u_k^j) - 2\nu u_i^k \vec{u}_{ki}. \end{aligned}$$

Равенство (7) для определения функций $\sigma^0, \vec{\sigma}$ расщеплено по всем производным порядков 4, 3, 2, 1. В результате получено представление решения как функций первых производных. Коэффициенты представления удовлетворяют переопределенной системе уравнений. Приведение системы в инволюцию является нерешенной проблемой.

Список литературы

- [1] Хабилов С.В., Чиркунов Ю.А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.
- [2] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [3] Пухначев В.В. Интегралы движения несжимаемой жидкости, заполняющий все пространство // ПМТФ. 2004. Т.45, №2. С. 22–27.

On conservation laws for a viscous fluid

Khabirov S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The equation of motion of viscous fluid have the divergence type of the conservation laws and admit the infinite Lie algebra of point symmetries. Canonical operators of the algebra give rise to conservation laws of the first order. This was tested for the basic operators of admitted algebra. Any conservation law may be turned by doing some canonical operator on the nontrivial conservation law. The canonical operators of the zero order of conservation laws were calculated. The problem about the calculation of canonical operators of the first order of conservation laws are supplied.

Keywords: viscous fluid, canonical operator, conservation law



Многофазные системы:
модели, эксперимент, приложения
ИМех им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

Статья рекомендована к публикации
Программным комитетом VI Российской конференции
«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»