

Схемы второго порядка точности для расчета динамики возмущений в упругом теле

Аганин А.А., Хисматуллина Н.А.

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Проведено сопоставление эффективности UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности в ряде задач о распространении линейных волн в упругом теле, их взаимодействии между собой и с поверхностью тела. В частности, рассмотрены одномерные задачи, имеющие аналитическое решение, и двумерная задача о динамике тела в окрестности места удара по его свободной поверхности. Показано что, если в задачах имеются выраженные экстремумы или короткие волны, то UNO-схема является более эффективной, поскольку в таких случаях проявляется снижение точности TVD-схемы вследствие строгого удовлетворения условию TVD. За счет приближенного удовлетворения условию TVD UNO-схема может приводить к появлению осцилляций численной природы на уровне погрешностей аппроксимации. Однако это не снижает эффективности UNO-схемы, поскольку с измельчением сетки амплитуда этих осцилляций уменьшается.

Ключевые слова: линейные волны в упругом теле, метод С.К. Годунова, UNO-схемы, TVD-схемы

Введение

При изучении динамики упругого тела [1, 2] применяется классический метод С.К. Годунова [3]. Данный метод является явным, устойчивым и монотонным, однако имеет первый порядок точности, так что для описания скачков и контактных разрывов зачастую приходится использовать очень мелкие сетки как по пространству, так и по времени. В работе [4] показано, что эффективность расчетов можно повысить, воспользовавшись UNO- и TVD-модификациями метода С.К. Годунова второго порядка точности [5]. TVD-схемы (Total Variation Diminishing, уменьшающие полную вариацию) являются монотонными, имеют на гладких решениях второй порядок точности всюду, за исключением экстремумов, где он понижается до первого. UNO-схемы (Uniformly Non Oscillatory, равномерно безосцилляционные) имеют на гладких решениях второй порядок точности всюду без исключения. Вместе с тем они допускают осцилляции численной природы, но лишь на уровне погрешностей аппроксимации.

В настоящей работе проводится сопоставление эффективности расчета линейных волн в упругом теле с помощью UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности. Рассматриваемые модификации аналогичны использованным в работе [6] для моделирования нелинейных волн в газе и жидкости. По существу рассматриваемые модификации различаются видом ограничителя на значения пространственных производных. Ограничитель TVD-модификации включает в себя аппроксимации первых производных и обеспечивает строгое выполнение свойства TVD. Ограничитель UNO-модификации включает в себя аппроксимации производных не только первого, но и второго порядков и обеспечивает приближенное выполнение свойства TVD.

1. Постановка задачи

Сопоставляется эффективность расчета линейных волн в упругом теле с помощью UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности. В декартовой системе координат x, y расчетная область представляет собой прямоугольник $[X_L \leq x \leq X_R] \times [Y_B \leq y \leq Y_T]$, стороны которого попарно параллельны осям x и y . Границы расчетной области могут быть жесткими стен-

ками и/или свободными поверхностями, и/или искусственными границами. Жесткие стенки определяются их скоростью, свободные поверхности — их нормальными и касательными напряжениями. Искусственные границы ограничивают расчетную область как часть тела, представляющую наибольший интерес с точки зрения конкретного исследования, от других, менее существенных областей. Расчетная область покрывается равномерной по осям x и y прямоугольной сеткой.

1.1. Уравнения динамики упругого тела

Динамика упругого тела описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(S_{xx} - P)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(S_{yy} - P)}{\partial y}, \\ \frac{\partial S_{xx}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial S_{yy}}{\partial t} &= -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время; ρ — плотность; u, v — компоненты скорости по осям x и y ; S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} — компоненты дивергенции тензора напряжений; P — всестороннее (гидростатическое) давление; λ, μ — параметры Ламе; $K = \lambda + 2/3\mu$ — коэффициент объемного расширения.

1.2. Начальные условия

В рассматриваемых в настоящей работе задачах начальное состояние тела (при $t = 0$) определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} P(0, x, y) &= P_0(y), \\ S_{xy}(0, x, y) &= S_{xy,0}(y), \\ S_{xx}(0, x, y) &= \frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} P_0(y), \\ S_{yy}(0, x, y) &= -\frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} P_0(y), \\ u(0, x, y) &= \frac{S_{xy,0}(y)}{\rho c_2}, \\ v(0, x, y) &= -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{3P_0(y)}{\rho c_1}, \end{aligned}$$

где $P_0(y), S_{xy,0}(y)$ — заданные функции.

1.3. Граничные условия

Если какая-либо граница является жесткой стенкой, то на этой границе

$$u(t, x, y) = u_\Gamma(t), \quad v(t, x, y) = v_\Gamma(t),$$

если же граница является свободной поверхностью, то

$$(S_{yy} - P)(t, x, y) = -p_\Gamma(t), \quad S_{xy}(t, x, y) = \tau_\Gamma(t),$$

где $u_\Gamma(t), v_\Gamma(t), p_\Gamma(t), \tau_\Gamma(t)$ — заданные функции, индекс Γ здесь и далее указывает на отношение к границе.

На искусственной границе ставятся неотражающие условия [7].

1.4. Аппроксимация уравнений

Алгоритм и UNO-, и TVD-модификаций состоит из трех шагов, которые подробно описаны в [4].

Первый шаг — расчет значений искомого величин на полуцелом временном слое. При этом значения производных по времени выражаются через пространственные производные, а при вычислении пространственных производных используются ограничители. UNO- и TVD-схемы различаются видом ограничителя: ограничитель UNO-схемы включает в себя аппроксимации и первой, и второй производных, тогда как ограничитель TVD-схемы — аппроксимации только первой производной.

Второй шаг — расчет численных потоков между ячейками. Здесь используется решение задачи Римана о распаде разрыва.

Третий шаг — вычисление искомого значений на новом временном слое по явной конечно-разностной формуле.

1.5. Аппроксимация граничных условий

Для аппроксимации граничных условий вдоль границ вводится слой фиктивных ячеек, примыкающих к расчетной области. Значения параметров в этих ячейках, а также на их гранях, совпадающих с границей расчетной области, вычисляются с использованием значений из смежных ячеек расчетной области и решения задачи Римана.

2. Результаты

2.1. Динамика волн, вызванных воздействием на поверхность тела

Рассматриваются две задачи о распространении вдоль оси y одномерных волн, возбуждаемых на поверхности тела $y = 0$, внутрь невозмущенного тела

$$P_0(y) = S_{xy,0}(y) = 0.$$

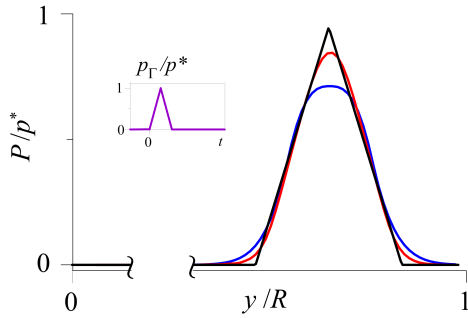


Рис. 1. Распределения всестороннего давления P в теле в один из моментов времени при возбуждении уходящей в тело волны указанным во вставке импульсом давления на поверхности тела $y = 0$. Черные линии — аналитическое решение, красные — схема UNO, синие — схема TVD

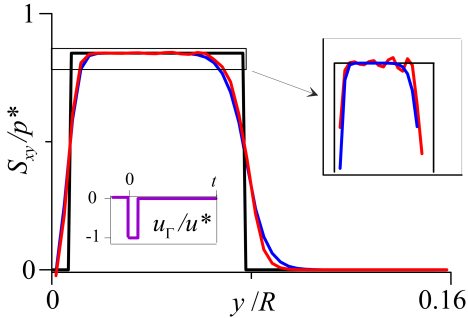


Рис. 2. Распределения напряжения S_{xy} в теле в один из моментов времени при возбуждении уходящей в тело волны указанным в левой нижней вставке импульсом скорости на поверхности тела $y = 0$. В правой верхней вставке представлен более подробно выделенный фрагмент. Черные линии — аналитическое решение, красные — схема UNO, синие — схема TVD

В первой задаче поверхность тела $y = 0$ является свободной. Уходящая в тело волна определяется на $y = 0$ импульсом давления $p_{\Gamma}(t)$, которое сначала линейно растет от нуля, а затем также линейно до нуля падает:

$$\tau_{\Gamma}(t) = 0, \quad p_{\Gamma}(t) = \begin{cases} at, & \text{если } 0 \leq t \leq \tilde{t}, \\ -at + b, & \text{если } \tilde{t} < t < \hat{t}, \\ 0, & \text{если } t \geq \hat{t}, \end{cases}$$

где a , b , \tilde{t} , \hat{t} — заданные величины.

Во второй задаче поверхность тела $y = 0$ является жесткой стенкой. Уходящая в тело волна определяется на $y = 0$ импульсом нормальной составляющей скорости $v_{\Gamma}(t)$, которая сначала резко уменьшается от нуля до некоторого значения, а за-

тем через некоторое время также резко возрастает до нуля:

$$u_{\Gamma}(t) = 0, \quad v_{\Gamma}(t) = \begin{cases} -v^*, & \text{если } 0 \leq t < t^*, \\ 0, & \text{если } t \geq t^*, \end{cases}$$

где t^* — заданная величина.

В обеих задачах расчетной областью в направлении оси y является отрезок $0 \leq y \leq R$, граница $y = R$ которого является искусственной.

Результаты расчетов первой задачи TVD- и UNO-схемами на сетке из 100 ячеек и соответствующее точное решение в один из моментов времени $t > \hat{t}$ представлены на рис. 1. Видно, что наиболее близкий к точному решению результат дает схема UNO. Отклонение по амплитуде волны составляет 10%. Схема TVD описывает волну немного хуже: погрешность по амплитуде составляет 24%. Данные различия иллюстрируют проявление отмеченного выше понижения порядка точности схемы TVD во втором до первого в экстремальных точках решения.

Выше также было отмечено, что UNO-схемы наряду с равномерно достигаемым вторым порядком точности могут допускать осцилляции численной природы на уровне погрешностей аппроксимации. Этот факт демонстрирует рис. 2, на котором представлены результаты расчетов второй задачи TVD- и UNO-схемами и соответствующее точное решение в один из моментов времени $t > t^*$. Видно, что в решении, полученном по схеме UNO, появились осцилляции, тогда как в решении, полученном по схеме TVD, их нет. С измельчением сетки амплитуда данных осцилляций уменьшается, это подтверждает, что они имеют порядок погрешностей аппроксимации.

2.2. Динамика волн при их взаимодействии с поверхностью тела

Рассматриваются две задачи о взаимодействии волн с границей. В первой задаче в начальный момент $t = 0$ в направлении свободной поверхности тела $y = 0$ распространяется волна, определяемая следующими выражениями

$$S_{xy,0}(y) = 0, \quad P_0(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < y < R/2, \\ p^*, & \text{если } y \geq R/2. \end{cases}$$

На свободной поверхности $y = 0$ в интервале $0 \leq t \leq \tilde{t}$ возбуждается уходящий в тело импульс, определяемый следующими выражениями

$$\tau_{\Gamma}(t) = 0, \quad p_{\Gamma}(t) = \begin{cases} 0.7p^*, & \text{если } 0 \leq t \leq \tilde{t}, \\ 0, & \text{если } t > \tilde{t}. \end{cases}$$

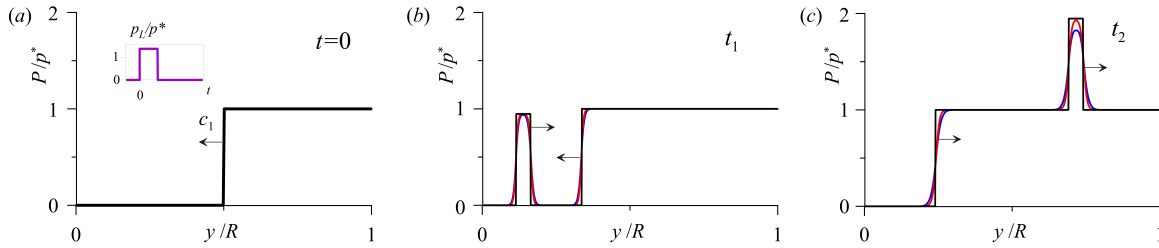


Рис. 3. Распределения всестороннего давления P в теле при $t = 0$ в два последовательных момента времени в задаче о взаимодействии волны со свободной поверхностью тела $y = 0$, на которой генерируется указанный во вставке (а) уходящий в тело импульс. Стрелочки указывают направление распространения волн. Черные линии — аналитическое решение, красные — схема UNO, синие — схема TVD

Во второй задаче в начальный момент времени $t = 0$ в направлении поверхности тела $y = 0$, которая является неподвижной жесткой стенкой

$$u_{\Gamma}(t) = v_{\Gamma}(t) = 0,$$

распространяются две волны, определяемые следующими выражениями:

$$P(0, y) = \begin{cases} p^* > 0, & \text{при } 0.7R < y < 0.9R, \\ 0, & \text{при } y \leq 0.7R \text{ или } y \geq 0.9R; \end{cases}$$

$$S_{xy}(0, y) = \begin{cases} 0.3p^*, & \text{при } 0.3R < y < 0.5R, \\ 0, & \text{при } y \leq 0.3R \text{ или } y \geq 0.5R. \end{cases}$$

Одна из этих волн является волной сдвиговых напряжений, другая — волной продольных напряжений.

В обеих задачах расчетной областью в направлении оси y является отрезок $0 \leq y \leq R$, граница $y = R$ которого является искусственной.

Результаты расчетов первой задачи TVD- и UNO-схемами на сетке из 100 ячеек и соответствующее точное решение в два последовательных момента времени показаны на рис. 3. К моменту t_1 образованная воздействием на свободную поверхность короткая волна полностью отделилась от поверхности и приблизилась на относительно небольшое расстояние к распространяющейся ей навстречу волне (определяемой начальными условиями). В промежутке $t_1 < t < t_2$ эти волны взаимодействуют между собой, уходящая от поверхности тела волна все больше удаляется от нее, тогда как передний фронт распространяющейся к поверхности тела волны достигает ее и отражается от нее. Видно, что до момента t_1 обе схемы, и UNO, и TVD, дают практически совпадающие результаты. К моменту t_2 вычислительные погрешности накапливаются, проявляется понижение порядка точности TVD-схемы в области экстремумов, чего нет в UNO-схеме. В результате амплитуда образованной на поверхности тела короткой волны разрешается TVD-схемой уже

с погрешностью около 7%, тогда как в UNO-схеме она воспроизводится еще точно.

Результаты расчетов второй задачи TVD- и UNO-схемами на сетке из 100 ячеек и соответствующее точное решение в пять последовательных моментов времени показаны на рис. 4. Изначально определяемая профилем $\sigma_{yy} = S_{yy} - P$ волна продольных напряжений и определяемая профилем S_{xy} волна сдвиговых напряжений распространяются к поверхности тела (жесткой стенке) со скоростями c_1 и c_2 соответственно. При этом волна продольных напряжений находится от поверхности тела дальше, чем волна сдвиговых напряжений. Поскольку $c_1 > c_2$, то более быстрая волна продольных напряжений к моменту t_1 догоняет более медленную волну сдвиговых напряжений. К моменту t_2 передние фронты обеих волн достигают жесткой стенки, отражаются от нее и движутся в обратном направлении, тогда как задние фронты этих волн продолжают смещаться к стенке, оставаясь от нее на большем удалении, чем передние. К моменту t_3 передний и задний фронты волны продольных напряжений меняются местами: передний фронт оказывается к стенке ближе, чем задний. Аналогичная смена мест переднего и заднего фронтов относительно расстояния до стенки происходит к моменту t_4 и у волны сдвиговых напряжений. При этом задний фронт волны продольных напряжений успевает к этому моменту отразиться от стенки, так что к этому моменту падающая на стенку волна продольных напряжений полностью превращается в отраженную, уходящую от стенки вглубь тела. Аналогичное превращение падающей волны сдвиговых напряжений в отраженную завершается к моменту t_5 .

Как видно, в этой задаче схемы UNO и TVD описывают решение практически с одинаковой точностью. Это обусловлено тем, что понижение точности TVD-схемы здесь проявляется незначительно, поскольку в решении этой задачи нет ни острых пиков, как в первой задаче предыдущего раздела,

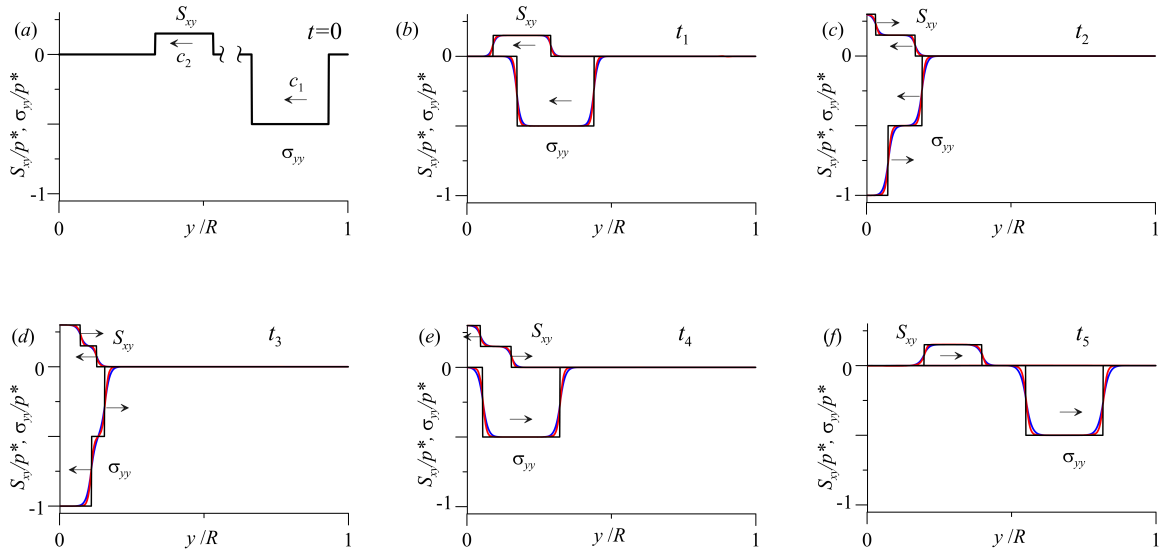


Рис. 4. Распределения напряжений $\sigma_{yy} = S_{yy} - P$ и S_{xy} в теле при $t = 0$ в пять последовательных моментов времени в задаче о взаимодействии волн сдвиговых (определяются профилем S_{xy}) и продольных (определяются профилем σ_{yy}) напряжений с неподвижной жесткой стенкой тела $y = 0$. Стрелочки указывают направление распространения волн. Черные линии — аналитическое решение, красные — схема UNO, синие — схема TVD

ни очень коротких волн, как в первой задаче данного раздела.

2.3. Удар по поверхности тела

Сравнение эффективности схем UNO и TVD в двумерном случае проводится на следующей задаче. В начальный момент времени $t = 0$ тело, представляющее собой упругое полупространство $y \leq 0$, находится в покое, причем:

$$P_0(y) = S_{xy,0}(y) = 0.$$

При $t = 0$ по части поверхности тела, которая является свободной, осуществляется импульсное воздействие. Оно реализуется в резком повышении давления до $p^* > 0$, которое затем плавно понижается до 0, что в граничном условии $y = 0$ выражается следующим образом (рис. 5):

$$\tau_\Gamma(t) = 0, \quad p_\Gamma(t) = p(t, x),$$

где

$$p(t, x) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{при } t \leq t^* \text{ и } |x| \leq 1/3R, \\ 0 & \text{при } t > t^* \text{ или } |x| > 1/3R, \end{cases}$$

a, b, c, t^* — заданные величины.

Данная задача имеет плоскость симметрии $x = 0$. С учетом этого в качестве расчетной области принимается квадрат $[0 \leq x \leq R] \times [-R \leq y \leq 0]$. Верхняя граница расчетной области $y = 0$ является

свободной поверхностью, левая граница $x = 0$ считается неподвижной жесткой стенкой, правая $x = R$ и нижняя $y = -R$ — искусственными границами.

Результаты расчетов этой задачи TVD- и UNO-схемами на равномерной сетке из 100×100 ячеек в два последовательных момента времени приведены на рис. 6. Интенсивность напряжений σ_i рассчитывалась по формуле

$$\sigma_i = \sqrt{3(\sigma_x^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x\sigma_z + \tau_{xy}^2)}.$$

Видно, что в этой задаче численные решения TVD- и UNO-схем различаются в целом незначительно. Вместе с тем, в отдельных местах расчетной области изолинии TVD-схемы более округлые, что обусловлено сглаживанием за счет более низкой точности этой схемы в областях экстремумов решения.

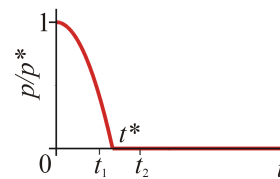


Рис. 5. Изменение давления в равномерно нагруженной области удара

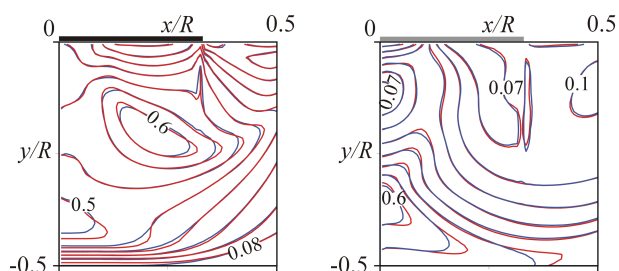


Рис. 6. Динамика тела при ударе по части его свободной поверхности $y = 0$ в окрестности места удара: изолинии интенсивности напряжений σ_i (указаны в долях p^*) во фрагменте расчетной области в два последовательных момента времени t_1 и t_2 (отмечены на рис. 5), рассчитанные по схеме TVD (синие кривые) и UNO (красные кривые); область удара закрашена черным

3. Заключение

Проведено сравнение эффективности UNO- и TVD-модификаций метода С.К. Годунова второго порядка точности при расчете линейных волн в упругом теле. Рассмотрены одномерные задачи, имеющие аналитическое решение, о распространении волн в теле, их взаимодействии друг с другом и с поверхностью тела, а также двумерная задача о динамике тела при ударе по его свободной поверхности. Показано что, если в решениях задач имеются выраженные экстремумы или короткие волны, то UNO-схема является более эффективной за счет того, что в таких случаях проявляется снижение точности TVD-схемы со второго порядка до первого. Проиллюстрировано, что при применении UNO-схемы возможно появление осцилляций численной

природы на уровне погрешностей аппроксимации, что не сказывается на эффективности этой схемы, поскольку амплитуда этих осцилляций по мере измельчения сетки уменьшается.

Список литературы

- [1] Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А. Численные методы решения задач динамической теории упругости. Кишинев: Изд-во Штиинца, 1976. 226 с.
- [2] Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Ударное воздействие струи жидкости на упруго-пластическое тело // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки. 2014. Т. 156. Книга 2. С. 72–86.
- [3] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [4] Аганин А.А., Хисматуллина Н.А. Модификации метода С.К. Годунова для расчета распространения возмущений в упругом теле // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11. С. 119–126.
- [5] Harten A., Engquist B., Osher S. and Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J.Comp. Phys. 1987. V. 71. P. 231–303.
- [6] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Расчет сильного сжатия сферического парогазового пузырька в жидкости // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 6. С. 54–64.
- [7] Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.

Schemes of the second order accuracy for computing the dynamics of disturbances in an elastic body

Aganin A.A., Khismatullina N.A.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan

The efficiency of the second-order accurate UNO- and TVD-modifications of the Godunov method is compared using a number of problems on the propagation of linear waves in an elastic body, their interaction with each other and with the surface of the body. In particular, one-dimensional problems having analytic solutions and a two-dimensional problem of the dynamics of a body in the vicinity of the impact domain on its free surface are considered. It is shown that if in the problems there are well-marked extrema or short waves, then the UNO-scheme is more effective, since in such cases decrease in the accuracy of the TVD-scheme becomes apparent due to strictly satisfying the TVD condition. Because of approximately satisfying the TVD condition, the UNO-scheme can lead to the appearance of oscillations of numerical nature at the level of approximation errors. However, this does not reduce the efficiency of the UNO scheme since the amplitude of those oscillations decreases with refinement of the grid.

Keywords: linear waves in an elastic body, S.K. Godunov method, UNO-schemes, TVD-schemes



Многофазные системы:
модели, эксперимент, приложения

ИМех им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

Статья рекомендована к публикации
Программным комитетом VI Российской конференции
«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»