

Гидродинамическое взаимодействие слабонесферических газовых пузырьков в жидкости в трёхмерной постановке задачи¹

Аганин А.А., Давлетшин А.И.

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Изучено влияние взаимного расположения слабонесферических пузырьков газа (воздуха) в жидкости (воде) на их гидродинамическое взаимодействие в пучности давления ультразвуковой стоячей волны. Рассматриваются три существенно различные конфигурации взаимного расположения пузырьков: линейная, плоская и пространственная. В первой конфигурации принято три пузырька на одной прямой, во второй — пять пузырьков на двух взаимно ортогональных прямых, в третьей — семь пузырьков на трёх взаимно ортогональных прямых. Во всех случаях один пузырёк является центральным, а другие расположены равноудаленно от него на указанных прямых. Пузырьки изначально сферические с радиусом 3 мкм. Условия комнатные, частота волны 20 кГц, амплитуда в 1.2 раза выше статического давления жидкости. Используется математическая модель, в которой жидкость считается слабосжимаемой слабовязкой, пузырьки — гомобарическими. Показано, что во всех конфигурациях пузырьков влияние их взаимодействия на радиальную динамику незначительно; центральный пузырёк остаётся неподвижным, а другие смещаются к нему с одинаковой для фиксированной конфигурации скоростью. При переходах от линейной конфигурации к плоской и от плоской к пространственной скорости сближения пузырьков возрастает. Во всех случаях деформации неподвижных центральных пузырьков меньше, чем остальных. Среди центральных пузырьков больше деформируется пузырёк в плоской конфигурации.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие пузырьков, акустическое поле, деформации пузырьков

1. Введение

При больших концентрациях пузырьков в жидкости значительную роль играет их гидродинамическое взаимодействие [1–8]. Оно особенно сильно проявляется при интенсивных изменениях давления жидкости, например, в результате акустического воздействия на жидкость. В результате взаимодействия пузырьки могут перемещаться в жидкости, а их поверхности деформироваться. Эти и другие особенности гидродинамического взаимодействия пузырьков могут быть использованы в различных приложениях [9–13].

Характер и интенсивность взаимодействия пузырьков может зависеть от различных факторов:

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН № III.4.2

размеров пузырьков, расстояния между ними, их количества, физических параметров газа в пузырьках и окружающей жидкости, закона изменения давления жидкости и т.д. В настоящей работе изучается влияние на динамику пузырьков (радиальные колебания, пространственные перемещения и деформации их поверхностей) их взаимного расположения. При этом рассматриваются три основных конфигурации взаимного расположения пузырьков. В первой конфигурации центры пузырьков находятся на одной прямой, во второй — в одной плоскости на двух взаимно ортогональных прямых и в третьей — в пространстве на трёх взаимно ортогональных прямых. Динамика пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных методом сферических функций [2] в предположении, что жидкость является слабосжимаемой, слабовязкой, пузырьки — гомобарическими.

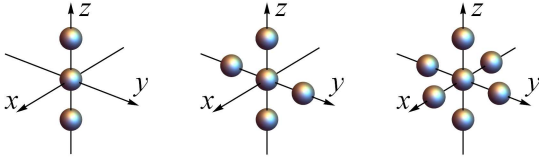


Рис. 1. Три конфигурации взаимного расположения пузырьков в начале их взаимодействия

2. Постановка задачи

Изучается зависимость динамики слабонесферических газовых пузырьков от их взаимного расположения в жидкости в акустическом поле. Предполагается, что пузырьки находятся в пучности стоячей волны, где давление p_∞ изменяется по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь p_0 — статическое давление жидкости; p_a , ω — амплитуда и частота колебаний; t — время.

Рассматриваются три существенно различающиеся конфигурации взаимного расположения пузырьков (рис. 1). В первой (линейной) конфигурации центры пузырьков находятся на одной прямой. Во второй (плоской) конфигурации центры пузырьков располагаются в одной плоскости на двух взаимно ортогональных прямых. В третьей (пространственной) конфигурации центры пузырьков размещаются в пространстве на трёх взаимно ортогональных прямых. В линейной конфигурации рассматриваются три взаимодействующих пузырька, в плоской — пять, в пространственной — семь. Во всех случаях один из пузырьков является центральным, остальные находятся на указанных прямых на одинаковом удалении от центрального. Изначально все пузырьки сферические, равного радиуса, заполнены воздухом. Жидкостью является вода при комнатных условиях.

Жидкость считается маловязкой малосжимаемой, пузырьки — гомобарическими. Учитывается влияние поверхностного натяжения.

Входные параметры задачи следующие: скорость звука в жидкости $c_0 = 1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 998$ кг/м³, статическое давление жидкости $p_0 = 1$ бар, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.0725$ Н/м, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м с), показатель адиабаты газа $\kappa = 1.4$, амплитуда колебаний давления в волне $p_a = 1.2$ бар, частота колебаний давления в волне $\omega/2\pi = 20$ кГц. В начальный момент времени $t = 0$ радиус пузырьков равен 3 мкм, расстояние между центрами центрального и других пузырьков $d_0 = 200$ мкм.

3. Математическая модель

Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости учитываются с помощью поправок к уравнениям взаимодействия пузырьков, выведенным в предположении, что жидкость является идеальной несжимаемой, а её движение потенциальным. В терминах потенциала скорости жидкости Φ динамика идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа и интегралом Коши–Лагранжа:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0, \quad (3)$$

где p — давление жидкости.

Давление газа в пузырьках изменяется по адиабатическому закону

$$p_k = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0k}} \right) \left(\frac{R_{0k}}{R_k} \right)^{3\kappa}. \quad (4)$$

Здесь R_k , R_{0k} — текущий и начальный радиусы k -го пузырька; $k = 1, 2, \dots, K$, K — число пузырьков.

На поверхности пузырьков выполняются кинематическое и динамическое контактные условия:

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} + \nabla \Phi \nabla F_k = 0, \quad (5)$$

$$p = p_k - \frac{2\sigma}{R_k}, \quad (6)$$

где F_k — функция, определяющая уравнение поверхности k -го пузырька $F_k = 0$, которое представляется в виде ряда по сферическим функциям

$$F_k = r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N \mathbf{a}_{nk}(t) \mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = 0. \quad (7)$$

Здесь r_k, θ_k, φ_k — сферическая система координат с началом отсчёта в центре k -го пузырька; $\mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = (Y_{nk}^{-n}, Y_{nk}^{-n+1}, \dots, Y_{nk}^{n-1}, Y_{nk}^n)$, $Y_{nk}^m = P_n^{|m|}(\cos \theta_k) e^{im\varphi_k}$ — сферическая функция; $P_n^{|m|}$ — присоединённый полином Лежандра степени n порядка $|m|$; i — мнимая единица; $\mathbf{a}_{nk} = ((a_{nk}^{-n} + ia_{nk}^n)/2, (a_{nk}^{-n+1} + ia_{nk}^{n-1})/2, \dots, a_{nk}^0, \dots, (a_{nk}^{-n+1} - ia_{nk}^{n-1})/2, (a_{nk}^{-n} - ia_{nk}^n)/2)$ a_{nk}^m — амплитуда отклонения поверхности k -го пузырька от сферической формы $r_k = R_k$ по поверхностной гармонике с номером n и порядком m ; N — максимум номера сферических гармоник в представлении поверхности пузырьков.

Полагается, что пузырьки расположены не очень близко друг к другу, а их несферичность и скорости пространственного смещения малы, причём

$$\delta^5 \sim \varepsilon^2 \sim \vartheta^4 \ll 1, \quad (8)$$

где $\delta = \max_{k,j} [(R_k + R_j)/d_{kj}]$; $\varepsilon = \max_{n,m,k} |\varepsilon_{nk}^m|$; $\vartheta = \max_k [|\mathbf{w}_k|/U_k]$; d_{kj} — расстояние между центрами k -го и j -го пузырьков; $\varepsilon_{nk}^m = a_{nk}^m/R_k$ — искажения (безразмерные амплитуды отклонений формы от сферической) поверхности k -го пузырька; U_k — характерная скорость радиальных пульсаций k -го пузырька; \mathbf{w}_k — скорость пространственного смещения k -го пузырька; $k, j = 1, 2, \dots, K$, $k \neq j$; $n = 2, 3, \dots, N$; $m = -n, -n + 1, \dots, n$.

Математическая модель динамики пузырьков в настоящей работе выводится из (1)–(7) методом сферических функций [2] с учётом предположений (8). Данная модель представляет собой следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков R_k , радиус-векторов их центров \mathbf{p}_k и векторов \mathbf{a}_{nk} , характеризующих отклонение поверхности пузырьков от сферической:

$$\begin{aligned}
 & R_k \ddot{R}_k + \frac{3\dot{R}_k^2}{2} - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\alpha}_{110} \dot{\mathbf{p}}_k}{4} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} - \\
 & - \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} + \psi_{0k} + \Delta_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{kj}} - \frac{B_{0j} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2} - \right. \\
 & - \frac{9B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{110} \mathbf{C}_{01kj}}{4d_{kj}^2} - \frac{(R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2} + \\
 & + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^K \frac{(R_j^3 B_{0s} \mathbf{C}_{01js} \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2 d_{js}^2} \\
 & \left. + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K \frac{9B_{0j} B_{0s} \mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{110} \mathbf{C}_{01ks}}{8d_{kj}^2 d_{ks}^2} \right], \\
 & R_k \ddot{\mathbf{p}}_k + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k - 2\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211}) - \\
 & - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{2} - \frac{7\dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{6} + \boldsymbol{\psi}_{1k} = \\
 & = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \left[\frac{3(R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj})'}{d_{kj}^2} - \frac{3(R_k R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{11kj})'}{2d_{kj}^3} - \right. \\
 & - \frac{5R_k B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{02kj} \boldsymbol{\beta}_{211})}{d_{kj}^3} - \frac{6R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3} + \\
 & + \frac{3(B_{0j} \mathbf{a}_{2k} (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\Upsilon}_{121}^2))'}{2d_{kj}^2} - \\
 & \left. - \frac{B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{2k} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{2k}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{121})}{d_{kj}^2} \right],
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & R_k \ddot{\mathbf{a}}_{mk} + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{a}}_{mk} - (m-1)\dot{R}_k \mathbf{a}_{mk} - \\
 & - \delta_{2m} \frac{27\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{112})}{8} + \frac{3}{2} \sum_{n=m-1}^{m+1} (\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{nk} \boldsymbol{\Upsilon}_{n1m}^2) - \\
 & - \frac{(m+1)\dot{\mathbf{p}}_k ((\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) \boldsymbol{\beta}_{n1m})}{(n+1)} + \\
 & + \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{nk} \boldsymbol{\Theta}_{n1m}^{\frac{2(2-m)}{3}})) + \frac{(m^2-1)(m+2)\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{mk}}{\rho_0 R_k} + \\
 & + \boldsymbol{\psi}_{mk} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \left[\delta_{2m} \left(-\frac{27B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{112})}{4d_{kj}^2} + \right. \right. \\
 & + \frac{5(R_k^2 B_{0j} \mathbf{C}_{02kj})'}{d_{kj}^3} + \\
 & \left. + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^K \frac{27B_{0j} B_{0s} \mathbf{C}_{01kj} (\mathbf{C}_{01ks} \boldsymbol{\beta}_{112})}{8d_{kj}^2 d_{ks}^2} \right) + \\
 & + \delta_{3m} \left(-\frac{10R_k B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{02kj} \boldsymbol{\beta}_{213})}{d_{kj}^3} + \right. \\
 & + \frac{7(R_k^3 B_{0j} \mathbf{C}_{03kj})'}{d_{kj}^4} + \\
 & + \sum_{n=m-1}^{m+1} \left(\frac{3(B_{0j} \mathbf{a}_{nk} (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\Upsilon}_{1nm}^2))'}{2d_{kj}^2} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3(m+1)B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{1nm})}{2(n+1)d_{kj}^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь штрихи и точки сверху означают дифференцирование по времени; $k = 1, 2, \dots, K$; $m = 2, 3, \dots, N$; δ_{nm} — символ Кронекера; $B_{0k} = -R_k^2 \dot{R}_k$; $\mathbf{p}_k = ((x_{ck} + iy_{ck})/2, z_{ck}, (x_{ck} - iy_{ck})/2)$; $\boldsymbol{\varepsilon}_{nk} = \mathbf{a}_{nk}/R_k$ — векторы-строки, где x_{ck}, y_{ck}, z_{ck} — координаты центра k -го пузырька; $\mathbf{C}_{\gamma\zeta kj} = (C_{\gamma\zeta kj}^{\xi\vartheta})$; $\boldsymbol{\alpha}_{\gamma\zeta\varrho} = (\alpha_{\gamma\zeta\varrho}^{\xi\vartheta})$ — матрицы, где $\zeta = -\gamma, -\gamma + 1, \dots, \gamma$, $\xi = -\varsigma, -\varsigma + 1, \dots, \varsigma$, $\vartheta = \varrho, \varrho - 1, \dots, -\varrho$;

$$C_{\gamma\zeta kj}^{\xi\vartheta} = \frac{(\gamma + \varsigma - |\zeta - \xi|)! Y_{\gamma\varsigma}^{\zeta-\xi}(\theta_{kj}, \varphi_{kj})}{(-1)^{\gamma+|\zeta+\xi-\zeta-\xi|} (\gamma - |\zeta|)! (\varsigma + |\xi|)!};$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\gamma\zeta\varrho}^{\xi\vartheta} &= \frac{2\varrho + 1}{4\pi} \frac{(\varrho - |\vartheta|)!}{(\varrho + |\vartheta|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta \times \\
 & \times Y_\gamma^\zeta(\theta, \varphi) Y_\varsigma^\xi(\theta, \varphi) Y_\varrho^\vartheta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi;
 \end{aligned}$$

$\theta_{kj}, \varphi_{kj}$ — угловые координаты центра j -го пузырька в сферической системе с началом отсчёта в центре k -го; $\boldsymbol{\beta}_{\gamma\zeta\varrho} = [\gamma(\gamma+1) + \varsigma(\varsigma+1) - \varrho(\varrho+1)] \boldsymbol{\alpha}_{\gamma\zeta\varrho}/2$; $\boldsymbol{\Theta}_{\gamma\zeta\varrho}^p = p \boldsymbol{\alpha}_{\gamma\zeta\varrho} + \boldsymbol{\beta}_{\gamma\zeta\varrho}$; $\boldsymbol{\Upsilon}_{\gamma\zeta\varrho}^p = p \boldsymbol{\alpha}_{\gamma\zeta\varrho} - \boldsymbol{\beta}_{\gamma\zeta\varrho}$.

Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости описываются без учёта взаимодействия между пузырьками, так что поправки $\psi_{0k}, \boldsymbol{\psi}_{1k}, \boldsymbol{\psi}_{mk}$ и Δ_k

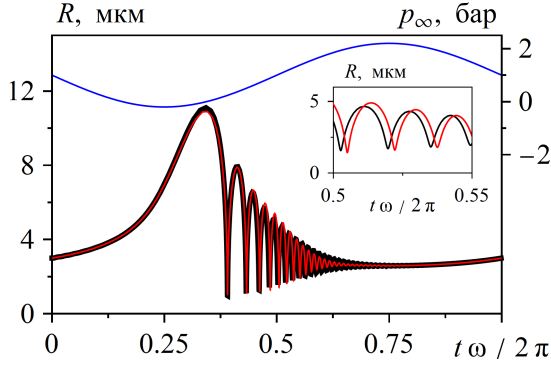


Рис. 2. Изменение радиуса R центрального среди трёх расположенных на одной прямой пузырьков в ходе первого (чёрные кривые) и сорокового (красные кривые) периодов колебаний давления жидкости p_∞ (синяя кривая). Во вставке более подробно представлен небольшой фрагмент этих периодов

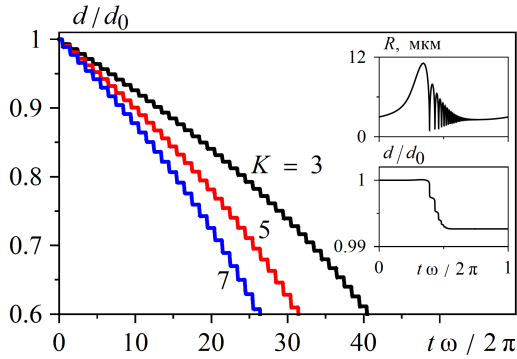


Рис. 3. Изменение безразмерного расстояния между центрами центрального и соседних с ним пузырьков d/d_0 в случаях линейной (чёрная кривая), плоской (красная кривая) и пространственной (синяя кривая) конфигураций пузырьков. Во вставке приведено изменение радиуса центрального пузырька R и безразмерного расстояния d/d_0 в случае линейной конфигурации в ходе первого периода колебаний давления жидкости

определяются следующим образом:

$$\Psi_{0k} = \frac{4\nu\dot{R}_k}{R_k}, \quad \Psi_{1k} = \frac{12\nu\dot{p}_k}{R_k},$$

$$\Psi_{mk} = \frac{2(m+1)\nu}{R_k} \left((m+2)\dot{a}_{mk} + 2(m-1)\dot{R}_k \epsilon_{mk} \right),$$

$$\Delta_k = -\frac{\dot{R}_k}{c_0} \left(R_k \ddot{R}_k + \frac{\dot{R}_k^2}{2} + \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} \right) - \frac{R_k}{c_0} \left(\frac{\dot{p}_k - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4\nu\ddot{R}_k}{R_k} \right),$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Решение системы (9)–(11) находится численно при следующих начальных значениях:

$$R_k = R_{k0}, \quad \dot{R}_k = 0, \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k0}, \quad \dot{\mathbf{p}}_k = 0,$$

$$\mathbf{a}_{mk} = 0, \quad \dot{\mathbf{a}}_{mk} = 0,$$

где $R_{k0} = 3$ мкм, а \mathbf{p}_{k0} определяется тем, что для центрального пузырька этот параметр равен нулю (центральный пузырёк находится в начале координат), а другие пузырьки удалены от него вдоль соответствующих осей на расстояние $d_0 = 200$ мкм.

4. Результаты

На рис. 2 представлено изменение радиуса R центрального пузырька в линейной конфигурации из трёх пузырьков в ходе двух периодов (первого и сорокового) колебаний давления жидкости p_∞ . Видно, что пузырёк испытывает сильные радиальные расширения и сжатия. Так, на стадии понижения давления жидкости он расширяется почти в четыре раза. Наличие соседних пузырьков приводит со временем к небольшому уменьшению максимального радиуса и незначительному смещению фазы колебаний на стадии затухающих пульсаций. Радиусы других пузырьков в данной конфигурации, а также радиусы всех пузырьков в двух других конфигурациях изменяются примерно по такому же закону.

Во всех трёх конфигурациях центральный пузырёк в силу симметричного расположения остальных остаётся неподвижным на протяжении всего рассмотренного промежутка времени. В отличие от него изначально неподвижные боковые пузырьки в результате взаимодействия начинают перемещаться в сторону центрального. На рис. 3 представлено изменение безразмерного расстояния между центрами боковых и центрального пузырьков d/d_0 на протяжении нескольких десятков периодов колебания давления жидкости в каждой из трёх рассматриваемых конфигураций пузырьков.

Во вставке представлено также изменение радиуса центрального пузырька R и безразмерного расстояния d/d_0 в случае линейной конфигурации в ходе первого периода. Видно, что при расширении боковые пузырьки перемещаются значительно меньше и медленнее, чем при сжатии. Наибольшее за период смещение наблюдается в ходе первого наиболее сильного сжатия, особенно в его заключительной высокоскоростной стадии. Последующие пространственные перемещения в ходе затухающих радиальных колебаний являются менее выраженными, а к концу периода практически исчезают. Данная картина от периода к периоду повторяется лишь с той разницей, что в начале каждого последующего периода взаимодействие пузырьков начинается с более близкого расстояния. Скорость сближения пузырьков во всех трёх рассмотренных конфигурациях оказывается разной: увеличение числа взаимодействующих пузырьков в рамках рассмотренных конфигураций приводит к возрастанию скорости их сближения.

В результате взаимодействия между пузырьками поверхности как центрального, так и боковых пузырьков деформируются. При этом во всех конфигурациях деформации неподвижного центрального пузырька оказываются меньше деформаций смещающихся к нему боковых пузырьков. На рис. 4 представлены изменения безразмерных амплитуд деформаций поверхности центрального пузырька в виде второй гармоники ($n = 2$) с порядком $m = 0, -2$ в случае линейной и плоской конфигураций на протяжении десяти периодов колебаний давления жидкости, а на рис. 5 — изменение радиуса и деформаций в случае плоской конфигурации на части первого периода. Неподвижные центральные пузырьки в случае линейной и плоской конфигураций деформируются только по второй гармонике с порядком $m = 0, -2$. (Примеры возможной несферичности пузырька по второй гармонике для всевозможных порядков представлены на рис. 6.) Максимальные деформации центральных пузырьков возникают в окрестности интенсивных радиальных пульсаций, а в начале и в конце каждого периода пузырьки оказываются практически сферическими. При этом в случае линейной конфигурации пузырьков (в силу осевой симметрии) возникает только вторая гармоника с нулевым порядком (характеризуется величиной ε_2^0), а в случае пяти пузырьков кроме нулевого порядка возникает ещё и несферичность по второй гармонике с порядком минус два (характеризуется величиной ε_2^{-2}). В случае пространственной конфигурации из семи пузырьков центральный пузырек не деформируется, т.е. остаётся сферическим на всем рассмот-

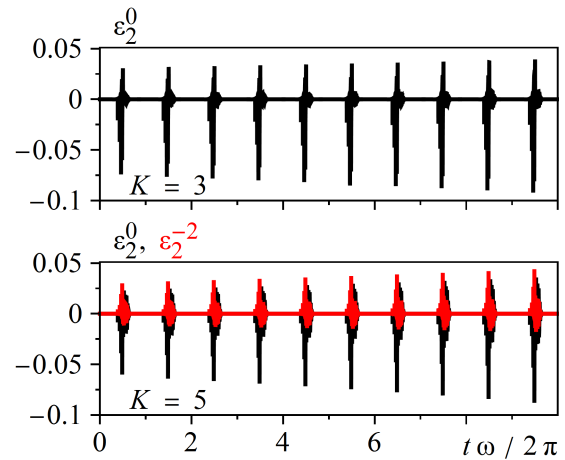


Рис. 4. Деформации центрального пузырька в первой (сверху) и второй (снизу) конфигурациях пузырьков в виде второй гармоники ($n = 2$) с порядком $m = 0, -2$ на протяжении десяти периодов колебаний давления жидкости (деформации по всем другим гармоникам равны нулю)

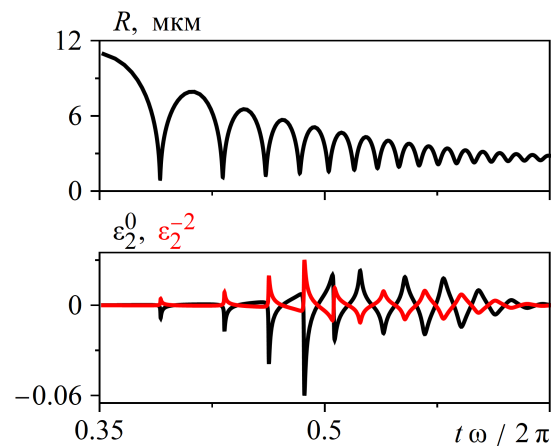


Рис. 5. Изменение радиуса центрального пузырька R (сверху) и амплитуд его несферичности $\varepsilon_2^0, \varepsilon_2^{-2}$ в виде второй гармоники ($n = 2$) с порядком $m = 0, -2$ (снизу) в случае плоской конфигурации пузырьков на части первого периода колебаний давления жидкости

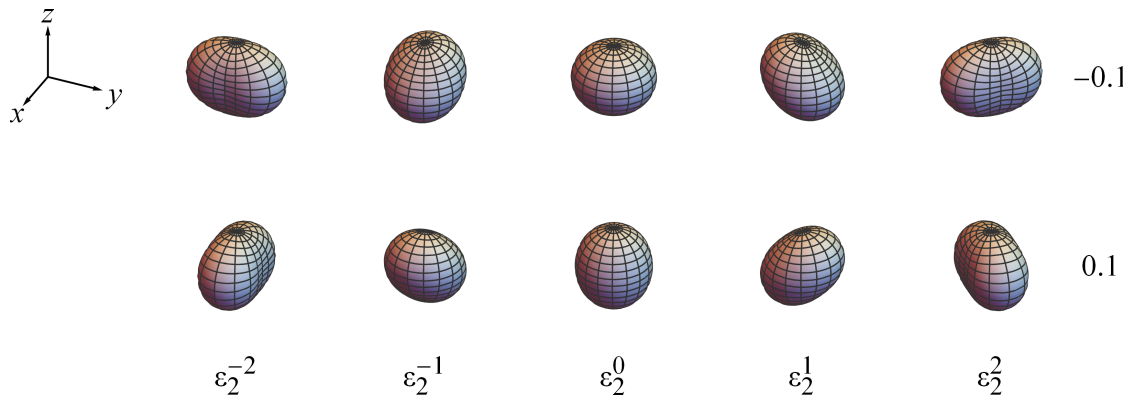


Рис. 6. Примеры возможных деформаций поверхности пузырьков по второй сферической гармонике ($n = 2$) с $m = -2, -1, \dots, 2$ и относительной амплитудой ± 0.1

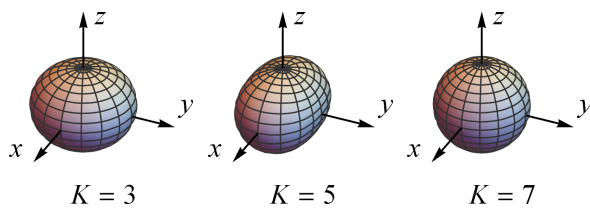


Рис. 7. Формы центральных пузырьков на момент их максимальных за период деформаций для трёх рассматриваемых конфигураций

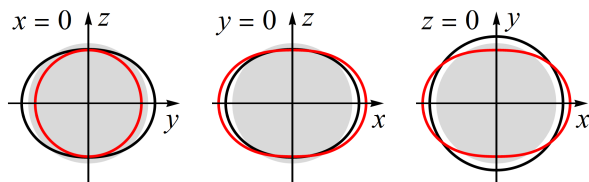


Рис. 8. Сечения центральных пузырьков координатными плоскостями на момент их максимальных за период деформаций. Чёрные кривые соответствуют пузырьку линейной конфигурации, красные — пузырьку плоской конфигурации, серые окружности — пузырьку пространственной конфигурации.

ренном промежутке времени. Это объясняется тем, что четвертого порядка точности по расстоянию (по малому параметру δ) не хватает для описания более высокочастотных деформаций, которые, по сути, должны возникать у центрального пузырька в пространственной конфигурации при их сближении на достаточно малые расстояния. Однако, на достаточно больших расстояниях между пузырьками, соответствующих точности настоящей модели, центральный пузырёк в пространственной конфигурации будет оставаться близким к сферическому.

Формы центральных пузырьков на момент их максимальных за период деформаций представлены на рис. 7. В случае пузырьков, расположенных на одной линии, центральный пузырёк принимает форму эллипсоида, сплюснутого вдоль линии их центров, в случае пузырьков, расположенных на одной плоскости — эллипсоида, вытянутого вдоль прямой, перпендикулярной плоскости центров пузырьков, в случае пузырьков, расположенных на трёх взаимно ортогональных прямых — сферы. На рис. 8 представлены сечения этих пузырьков тремя координатными плоскостями. Видно, что в рамках рассмотренных конфигураций максимальные деформации испытывает пузырёк, окруженный четырьмя пузырьками, расположенными в одной плоскости.

5. Заключение

Проведено исследование зависимости радиальных колебаний пузырьков, их пространственных перемещений и деформаций в пучности стоячей волны давления в зависимости от их взаимного расположения. Сопоставлены три основных конфигурации взаимного расположения пузырьков, а именно, когда центры пузырьков находятся: (1) на одной прямой, (2) в одной плоскости на двух взаимно ор-

тогональных прямых, и (3) в пространстве на трёх взаимно ортогональных прямых. В первой конфигурации (линейной) принято три взаимодействующих пузырька, во второй (плоской) — пять, в третьей (пространственной) — семь. Во всех конфигурациях один из пузырьков является центральным, а остальные попарно расположены на указанных прямых на одинаковом удалении от центрального. Пузырьки изначально все сферические, с одинаковым радиусом 3 мкм, заполнены воздухом. Жидкостью является вода в комнатных условиях. Давление в пучности волны изменяется по гармоническому закону с частотой 20 кГц и амплитудой, в 1.2 раза превышающей статическое давление жидкости.

Исследование проводится с помощью математической модели, в которой жидкость считается слабосжимаемой и слабовязкой, пузырьки — гомобарическими, давление в пузырьках — изменяющимся по адиабатическому закону. Учитывается влияние поверхностного натяжения. Взаимодействие между пузырьками учитывается с точностью до величин четвёртого порядка малости относительно малого параметра, представляющего собой отношение радиусов пузырьков к расстоянию между ними. Деформации пузырьков и скорости их пространственного смещения считаются малыми. Данная модель представляет собой полученную методом сферических функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, пространственных координат их центров и амплитуд отклонений их формы от сферической.

Показано, что во всех конфигурациях пузырьков влияние их взаимодействия на их радиальную динамику незначительно. Во всех конфигурациях центральный пузырёк остаётся неподвижным, а соседние к нему смещаются в его сторону с одинаковой, но зависящей от конфигурации, скоростью. При переходе от линейной конфигурации к плоской, как и при переходе от плоской конфигурации к пространственной скорость сближения пузырьков возрастает. Во всех случаях деформации неподвижного центрального пузырька меньше деформаций смещающихся к нему соседних пузырьков. Среди центральных пузырьков максимальные деформации испытывает пузырёк в плоской конфигурации. Установлено, что на соответствующих принятой модели расстояниях между пузырьками центральный пузырёк в плоской конфигурации остаётся осесимметричным (с осью симметрии, ортогональной плоскости центров пузырьков), а в пространственной конфигурации — чисто сферическим.

Список литературы

- [1] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учётом их малой несферичности // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 6. С. 89–102.
- [2] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Взаимодействие сферических пузырьков с центрами на одной прямой // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 3–18.
- [3] Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю. Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 1. С. 3–19.
- [4] Doinikov A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // The Journal of the Acoustical Society of America. 2004. Vol. 116, № 2. P. 821–827.
- [5] Губайдуллин А.А., Губкин А.С. Исследование динамики пузырькового кластера // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. P. 91–97.
- [6] Губайдуллин А.А., Губкин А.С. Поведение пузырьков в кластере при акустическом воздействии // Современная наука: идеи, исследования, результаты, технологии. 2013. № 1. P. 363–367.
- [7] Konovalova S., Akhatov I. Structure formation in acoustic cavitation // Multiphase Science and Technology. 2005. Vol. 17, № 3. P. 343–371.
- [8] Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S. Dynamics of a cluster of bubbles in a liquid. Theoretical analysis // JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering. 1994. Vol. 37, № 2. P. 297–305.
- [9] Knapp R.T., Daily J.W., Hammitt F.G. Cavitation. New York: McGraw-Hill, 1970. 621 p.
- [10] Putterman S.J., Weninger K.P. Sonoluminescence: How bubbles turn sound into light // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. Vol. 32, № 1. P. 445–476.
- [11] Mason T.J. Ultrasonic cleaning: An historical perspective // Ultrasonics Sonochemistry. 2016. Vol. 29. P. 519–523.
- [12] Suslick K.S. Sonochemistry // Science. 1990. Vol. 247. P. 1439–1445.
- [13] Галимов Э.М., Кудин А.М., Скоробогатский В.Н. и др. Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395, № 2. С. 187–191.

Hydrodynamic interaction of weakly nonspherical gas bubbles in a liquid in the three-dimensional problem statement

Aganin A.A., Davletshin A.I.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan

The influence of the relative location of weakly nonspherical gas (air) bubbles in liquid (water) on their hydrodynamic interaction at the pressure antinode of an ultrasonic standing wave is studied. Three essentially different configurations of the mutual arrangement of the bubbles are considered: the linear, planar, and spatial ones. In the linear configuration, three bubbles are located on one straight line. In the planar configuration, five bubbles are situated on two mutually orthogonal straight lines. In the spatial configuration, seven bubbles are located on three mutually orthogonal straight lines. In all the cases, one of the bubbles is central, the others are equally-spaced from it on those lines. All the bubbles are initially spherical with a radius of 3 μm . Room conditions are considered, the frequency of the wave is 20 kHz, its amplitude is 1.2 times the static liquid pressure. A mathematical model is used, in which the liquid is assumed weakly compressible, the bubbles being homobaric. It is shown that in each configuration of the bubbles the influence of their interaction on their radial dynamics is insignificant. In each configuration, the central bubble remains stationary, while the others move to it at a speed equal for a fixed configuration. At transition from a linear configuration to a planar one and from a planar configuration to a spatial one, the bubble motion speed increases. In all the cases, the deformations of the central stationary bubbles are smaller than those of the rest. Among the central bubbles, the bubble in a planar configuration is deformed most.

Keywords: hydrodynamic interaction of bubbles, acoustic field, deformation of bubbles

