

# Исследование рассеяния от звуконепроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследуется рассеяние от одиночной звуконепроницаемой сферы при прохождении двух видов волн: сферической волны от монополюсного источника излучения и плоской волны. При решении уравнения Гельмгольца используется численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов, а также минимизировать машинное время. Проведено сравнение расчетов с известными экспериментальными данными и получено хорошее соответствие. Получены формулы для основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния, для сферы с произвольным акустическим импедансом; показана ее зависимость от основных параметров системы «сфера — окружающая среда» для двух видов падающего поля. Проведен численный параметрический анализ значения потенциала на поверхности сферы для различных значений ее радиуса, комплексного сопротивления, вида внешнего воздействия и т.п.

**Ключевые слова:** рассеяние, монополюсный источник излучения, плоская волна, одиночная сфера, полное сечение рассеяния

## 1. Введение

Явление рассеяния (дифракции) звука на препятствиях малых размеров играет очень важную роль в акустике, в том числе из-за того, что на этом явлении основываются многие практические применения акустических волн: гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирование атмосферы и океана и т.п. Случай одиночной сферы достаточно хорошо изучен в литературе (см., например, [1]). Однако, как правило, рассматривались два предельных случая — акустически жесткая и мягкая сферы. В настоящей работе при постановке граничных условий был рассмотрен общий случай, позволяющий рассмотреть сферу с произвольным комплексным сопротивлением (акустическим импедансом).

Случай одиночной сферы интересен с практической точки зрения, поскольку позволит в будущем проводить сравнения с результатами существующих экспериментальных данных и данных вычислительных экспериментов других исследователей для произвольного падающего поля, а также может

быть использован в качестве верификации расчетов в случае рассеяния от множества сфер.

При решении уравнения Гельмгольца используется численная техника, основанная на быстром методе мультиполей [2], которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов, а также минимизировать машинное время.

Целью настоящей работы является обобщение численной модели для определения поля вокруг одиночной звуконепроницаемой сферы с различным значением комплексного сопротивления при прохождении двух видов волн — плоской волны и сферической волны от монополюсного источника излучения.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим одиночную сферу радиуса  $a$  с центрами в координатах  $\mathbf{r}'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$  (см. рис. 1), расположенную в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, которая характеризуется плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Задача рассеяния звука от сферы сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплекс-

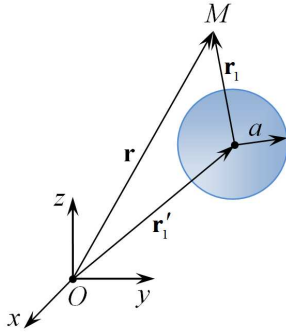


Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета

ного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$ :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями общего сопротивления на поверхности  $S_1$  сферы в случае, когда волна не может пройти сквозь эту поверхность:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial n} + i\sigma \psi \right) \Big|_{S_1} = 0. \quad (2)$$

В формулах (1), (2):  $k$  — волновое число;  $n$  — нормаль к поверхности;  $\sigma$  — комплексная полная проводимость;  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Потенциал внешнего поля представляется в следующей форме:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, соответствующего уходящим на бесконечность волнам (данное условие выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0. \quad (4)$$

## 2.1. Методика разложения по мультиполям

Представленная задача решается с помощью разложения по мультиполям следующим образом.

Вводится система отсчета, связанная с центром сферы, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ . На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию (4), может быть представлено в форме

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^s S_l^s(\mathbf{r}_1), \quad (5)$$

где  $A_l^s$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_l^s(\mathbf{r}_1)$  — мультиполя порядка  $l$  и степени  $s$ , которые определяются по формуле

$$S_l^s(\mathbf{r}_1) = h_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Здесь  $h_l(kr)$  — сферические функции Ханкеля первого типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда:

$$h_l(z) = j_l(z) + iy_l(z), \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

$j_l(z)$  — сферические функции Бесселя первого типа (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} j_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left(\frac{z}{2}\right)^{l+1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(l+j+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \\ &(|\arg z| < \pi), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$\Gamma(z)$  — гамма-функция;  $y_l(z)$  — сферические функции Бесселя второго типа или функции Неймана:

$$\begin{aligned} y_l(z) &= (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-(l+1/2)}(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \times \\ &\times \left(\frac{z}{2}\right)^{-(l+1/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(-l+j+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j} \\ &(|\arg z| < \pi), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$Y_l^s(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники:

$$Y_l^s(\theta, \varphi) = (-1)^s \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!}} P_l^{|s|}(\cos \theta) e^{is\varphi};$$

$P_l^s(\mu)$  — присоединенные функции Лежандра:

$$P_l^s(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{s/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+s}}{d\mu^{l+s}} (\mu^2 - 1)^l, \quad \mu = \cos \theta.$$

Разложение падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$  будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) R_l^s(\mathbf{r}_1),$$

где  $C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1)$  — коэффициенты разложения;  $R_l^s(\mathbf{r}_1)$  — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные со сферой:

$$R_l^s(\mathbf{r}_1) = j_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Тогда получим следующее разложение потенциала (3) около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l [C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) j_l(kr_1) + \\ &+ A_l^s h_l(kr_1)] Y_l^s(\theta_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (6)$$

При подстановке (6) в граничное условие (2) с учетом того, что ортогональные сферические гармоники  $Y_l^s(\theta_1, \varphi_1)$  являются независимыми функциями, получаются следующие значения неизвестных коэффициентов разложения:

$$A_l^s = -\frac{kj_l'(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)} C_l^{(in)s}(\mathbf{r}_1').$$

С учетом того, что Вронсиан для сферических функций Бесселя равен

$$W\{j_l(ka), h_l(ka)\} = j_l(ka)h_l'(ka) - j_l'(ka)h_l(ka) = \frac{i}{(ka)^2},$$

получим следующие выражения для потенциала поля рассеяния и полного потенциала на поверхности сферы:

$$\Psi_{\text{scat}} = -\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \frac{kj_l'(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)} \times h_l(kr_1) C_l^{(in)s}(\mathbf{r}_1') Y_l^s(\theta_1, \varphi_1), \quad (7)$$

$$\Psi|_{S_1} = \frac{i}{ka^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \frac{C_l^{(in)s}(\mathbf{r}_1') Y_l^s(\theta_1, \varphi_1)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)}. \quad (8)$$

## 2.2. Случай монопольного источника излучения

В случае монопольного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{source}}$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 G_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{source}}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{source}}|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{source}}|}, \quad (9)$$

где  $V_0$  — амплитуда объемной скорости (или производительность) монопольного источника. Здесь и далее временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается.

Задача для монопольного источника и одиночной сферы осесимметрична относительно оси, связывающей центр сферы и местоположение источника. Если эту ось взять в качестве оси  $z_1$ , тогда имеем (см., например, [2]):

$$C_l^{(in)s} = -V_0 ik \delta_{s0} h_l(kd) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}},$$

где  $d$  — расстояние между источником и центром сферы;  $\delta_{s0}$  — дельта-функция Дирака. Тогда формулы (7), (8), (9) в случае монопольного источника излучения примут вид соответственно

$$\Psi_{\text{scat}}^{(mp)} = \frac{V_0 ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{kj_l'(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)} \times h_l(kd) h_l(kr_1) P_l(\cos \theta_1), \quad (10)$$

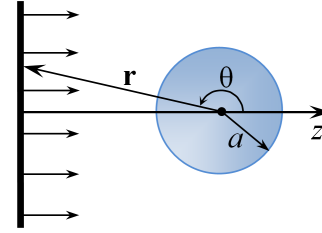


Рис. 2. Обозначения для падающей плоской волны на сферу

$$\Psi^{(mp)}|_{S_1} = \frac{V_0}{4\pi a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)h_l(kd)P_l(\cos \theta_1)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)}, \quad (11)$$

$$\Psi_{\text{in}}^{(mp)}(\mathbf{r}_1') = -\frac{V_0}{4\pi d} e^{ikd}. \quad (12)$$

Поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\omega \rho_0 \Psi,$$

то значения  $p^{(mp)}$ ,  $p_{\text{scat}}^{(mp)}$  и  $p_{\text{in}}^{(mp)}$  можно определять с помощью формул (10), (11), (12) с точностью до постоянной  $i\omega \rho_0$ .

## 2.3. Случай плоской волны

В случае плоской волны, падающей в положительном направлении оси  $z$  (рис. 2), разложение потенциала падающей волны будет иметь вид (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ik \cdot \mathbf{r}} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta_1) = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} R_l^0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно,

$$C_l^{(in)s} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \delta_{s0} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}$$

и формулы (7) и (8) примут вид:

$$\Psi_{\text{scat}}^{(pl)} = \frac{-p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{kj_l'(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)} \times h_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (14)$$

$$\Psi^{(pl)}|_{S_1} = \frac{p_0}{\omega \rho_0 k a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l (2l+1) P_l(\cos \theta)}{kh_l'(ka) + i\sigma h_l(ka)}. \quad (15)$$

### 3. Сравнение с экспериментальными данными

В работе [4] представлены результаты экспериментов по измерению отклика на поверхности сферы с помощью техники, основанной на определении направленной передаточной функции (directional transfer function, DTF), которая в настоящее время используется для измерения передаточной функции головы человека (head-related transfer function, HRTF) при разработке технологии создания позиционируемого 3D звука.

Для данного исследования в центр акустической камеры  $5 \times 5 \times 3 \text{ м}^3$  на вертикальном резьбовом стержне диаметра  $0.13 \text{ м}$ , вращающемся с помощью двигателя с шагом  $5$  градусов, был установлен шар для боулинга радиуса  $a = 0.109 \text{ м}$ . Центр шара находился на расстоянии  $1 \text{ м}$  от нижней поверхности камеры. В нем было просверлено отверстие, в которое был помещен зондирующий микрофон Etymotic Research ER-7C с длиной трубки  $0.076 \text{ м}$ , наружного диаметра  $0.0095 \text{ м}$  и внутреннего диаметра  $0.005 \text{ м}$ . При этом корпус микрофона полностью находился внутри шара вместе с наконечником датчика, располагающимся на одном уровне с поверхностью данного шара. Громкоговоритель был установлен на стойке микрофона, расположенной на расстоянии  $d$  от центра шара, а главная ось громкоговорителя была направлена к центру шара. В настоящей работе для сравнения с полученными экспериментальными данными [4] была рассчитана следующая переходная функция  $H$ , измеренная в децибелах, которая представляет отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности к амплитуде падающего поля в центре сферы:

$$H = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_{S_1}}{\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}'_1)} \right|. \quad (16)$$

При расчетах производилось усечение ряда в разложении. Число усечения  $M$ , определенное по эвристической формуле [4],

$$M = [eka], \quad e = 2.71828\dots, \quad (17)$$

являлось нижней границей для небольших чисел  $ka$ , а для больших значений достаточно было использовать формулу  $M \geq eka/2$  [2].

На рис. 3 представлено сравнение расчетных значений функции  $H$ , полученных с помощью формул (11) и (12) при  $\sigma = 0$ , и экспериментальных данных для четырех показательных углов падения волны —  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  и  $180^\circ$  в случае  $\rho_{\text{in}} = d/a = 20$ . Поскольку максимальная относительная погрешность в расчетах, полученных по формуле (16), и

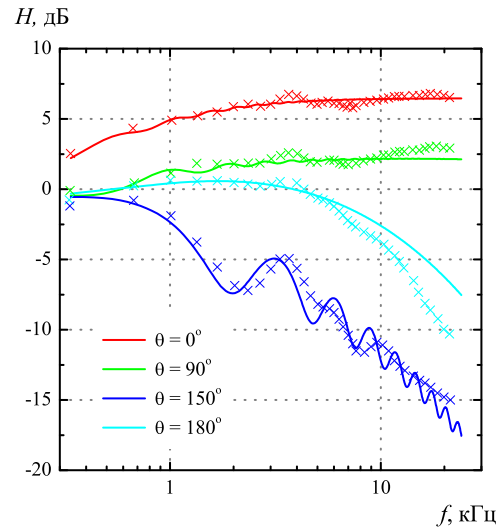


Рис. 3. Сравнение между расчетными данными настоящей работы и экспериментальными данными работы [4]: величина отклика  $H$  от частоты падающего поля  $f$  для шара радиуса  $0.109 \text{ м}$  при  $\rho_{\text{in}} = 20$

в работе [4] порядка  $10^{-2}\%$ , то данный график аналогичен графику, представленному в настоящей работе. Наибольшее отклонение, возникающее между теоретическими и экспериментальными данными, имеет место при  $\theta = 180^\circ$  и объясняется возможными ошибками центрирования при проведении экспериментов и наличием штока, выходящего кабеля микрофона и т.п., приводящих к искажению (по сравнению с идеальной сферой) результатов.

### 4. Сечение рассеяния

Для описания явления рассеяния вводится характеристика  $\sigma_s$ , называемая полным сечением рассеяния, величина которой определяется как отношение мощности рассеянной волны  $P_s$  к интенсивности падающей волны  $I_0$  (см., например, [1,5]), т.е.

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{(S)} I_s dS, \quad (18)$$

где  $I_s$  — интенсивность рассеянной волны; интеграл берется по сферической поверхности  $S = 4\pi r^2$  радиуса  $r$ , окружающей препятствие. Физический смысл величины  $\sigma_s$  — это площадь перпендикулярной потоку площадки (круга), попадая в которую налетающая частица испытывает рассеяние.

Интенсивность рассеянной волны определяет-

ся как

$$I_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p_{\text{scat}} v_{rs}^*), \quad (19)$$

где  $v_{rs}$  — колебательная скорость рассеянной волны в радиальном направлении, определяемая по формуле

$$v_{rs} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p_{\text{scat}}}{\partial r};$$

знак «\*» в верхнем индексе обозначает сопряженную величину.

Интенсивность падающей волны равна

$$I_0 = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c_0}. \quad (20)$$

В работе [1] представлен вывод сечения рассеяния для сферы радиуса  $a$  в случае плоской падающей волны. В соответствии с постановкой задачи настоящей работы сечение рассеяния в безразмерном виде определяется следующей формулой:

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = \frac{4}{(ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| B_l^{(\text{pl})} \right|^2, \quad (21)$$

$$B_l^{(\text{pl})} = \frac{kj'_l(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh'_l(ka) + i\sigma h_l(ka)}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Выведем формулу для  $\sigma_s$  в случае монополярного источника излучения. Тогда формула (20) примет вид:

$$I_0 = \frac{\omega\rho_0 V_0^2 k}{32\pi^2 d^2}.$$

Из формулы (10) получим формулу для давления рассеянной волны:

$$p_{\text{scat}}^{(\text{mp})} = -\frac{\omega\rho_0 V_0 k}{4\pi} \times \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) B_l^{(\text{mp})} h_l(kr) P_l(\cos \theta_1), \quad (22)$$

$$B_l^{(\text{mp})} = \frac{kj'_l(ka) + i\sigma j_l(ka)}{kh'_l(ka) + i\sigma h_l(ka)} h_l(kd), \quad l = 0, 1, \dots$$

Тогда выражение для колебательной скорости примет вид:

$$v_{rs}^{(\text{mp})} = \frac{iV_0 k^2}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) B_l^{(\text{mp})} h'_l(kr) P_l(\cos \theta_1). \quad (23)$$

Используя следующую асимптотику сферической функции Ханкеля и ее производной по аргументу  $kr$  при  $kr \rightarrow \infty$  (см., например, работу [1]):

$$h_l(kr)|_{kr \rightarrow \infty} = \frac{1}{kr} e^{ikr - i(l+1)\pi/2}, \quad h'_l(kr) = ih_l(kr),$$

а также равенство  $e^{i\pi l/2} = i^l$ , формулы (22) и (23) в дальнем поле примут соответственно следующий вид:

$$p_{\text{scat}}^{(\text{mp})} = \frac{i\omega\rho_0 V_0 e^{ikr}}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{-l} B_l^{(\text{mp})} P_l(\cos \theta_1),$$

$$v_{rs}^{(\text{mp})} = \frac{iV_0 k e^{ikr}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{-n} B_n^{(\text{mp})} P_n(\cos \theta_1).$$

При подстановке последних выражений в формулу (19) получим формулу для интенсивности рассеянной волны в дальнем поле:

$$I_s = \frac{I_0 d^2}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (2l+1)(2n+1) P_l(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta_1) \times \operatorname{Re} \left( B_l^{(\text{mp})} B_n^{(\text{mp})*} i^{-l} (i^{-n})^* \right).$$

Тогда, с учетом свойства ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & l \neq n, \\ \frac{2}{2l+1}, & l = n, \end{cases}$$

из формулы (18) получим следующее значение сечения рассеяния:

$$\sigma_s = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_s r^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi}{I_0} = 4\pi d^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| B_l^{(\text{mp})} \right|^2.$$

Таким образом, сечение рассеяния для монополярного источника излучения в безразмерном виде определяется по формуле

$$\frac{\sigma_s}{\pi a^2} = 4 \left( \frac{d}{a} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| B_l^{(\text{mp})} \right|^2. \quad (24)$$

На рис. 4 представлены безразмерные значения величины  $\sigma_s/(\pi a^2)$ , рассчитанной по формуле (21), в зависимости от волнового радиуса  $ka$  при различных значениях безразмерной проницаемости сферы  $\alpha = \sigma/k$ . Случай  $\sigma = 0$  соответствует акустически жесткой сфере, а  $\sigma = \infty$  — акустически мягкой.

На рис. 5 представлены безразмерные значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$ , рассчитанные по формулам (21) и (24) для двух предельных случаев жесткой и мягкой сфер. Для монополярного источника излучения были рассчитаны два случая с разными значениями расстояния от источника до центра сферы  $\rho_{in} = d/a = 2$  и  $\rho_{in} = 5$ . Видно, что с увеличением расстояния кривые стремятся к кривой в случае плоской волны.

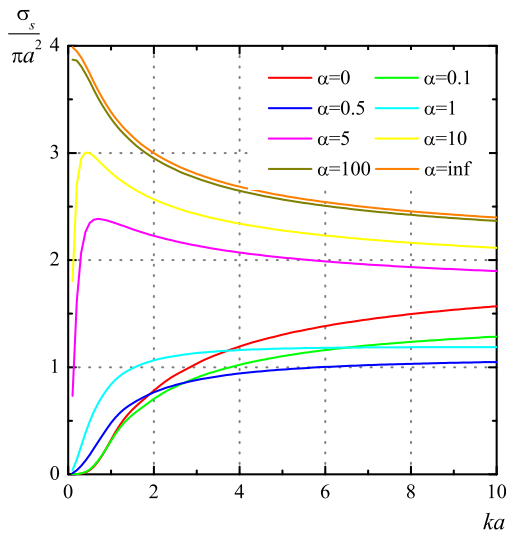


Рис. 4. Зависимость безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  при различных значения  $\alpha$  в случае плоской волны

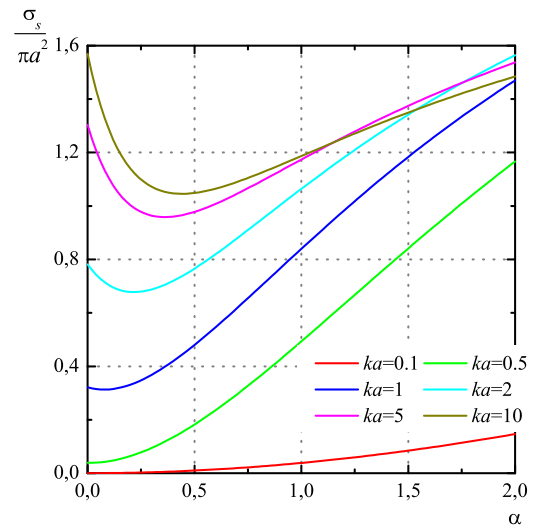


Рис. 6. Зависимость безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$  от безразмерной проницаемости сферы  $\alpha$  при различных значения волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны

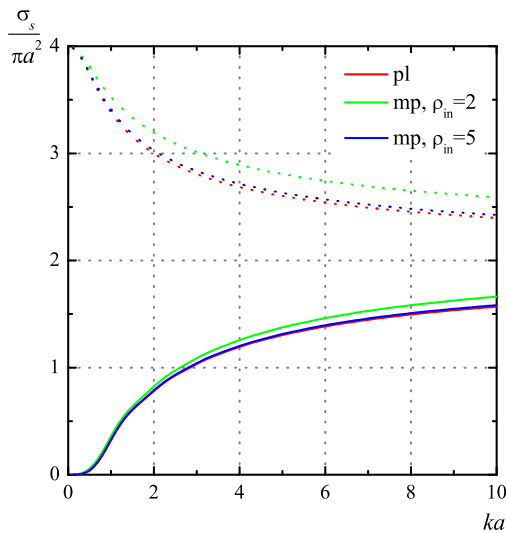


Рис. 5. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны и монополюсного источника излучения с  $\rho_{in} = 2$  и  $\rho_{in} = 5$ . Непрерывные линии — случай твердой сферы, пунктирные линии — случай мягкой сферы

Отметим, что предельные значения сечения рассеяния как для случая плоской волны (вывод представлен, например, в [1]), так и для монополюсного источника излучения (выводятся аналогично первому случаю) будут иметь следующий вид:

- для мягкой сферы при  $ka \ll 1$   

$$\sigma_s = 4\pi a^2;$$
- для жесткой сферы при  $ka \ll 1$   

$$\sigma_s = \frac{7}{9}\pi a^2 (ka)^4;$$
- для мягкой и жесткой сфер при  $ka \gg 1$   

$$\sigma_s = 2\pi a^2.$$

На рис. 6 представлены кривые, демонстрирующие зависимость безразмерных значений полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$ , рассчитанных по формуле (21), от значений числа  $\alpha$  для различных величин волнового радиуса  $ka$ .

## 5. Результаты численного моделирования

При численном моделировании использовались следующие значения параметров:  $a = 8.25 \cdot 10^{-2}$  м,  $8.25 \cdot 10^{-3}$  м;  $k = \omega/c_0$ ,  $\omega = 2\pi\Phi$  — частота поля,  $\Phi = 2 \cdot 10^3$  Гц,  $c_0 = 343.1$  м/с — скорость звука в воздухе;  $\alpha = \sigma/k = 0, 0.1, 0.5, 1$ ;  $\rho_{in} = d/a = 10$ .

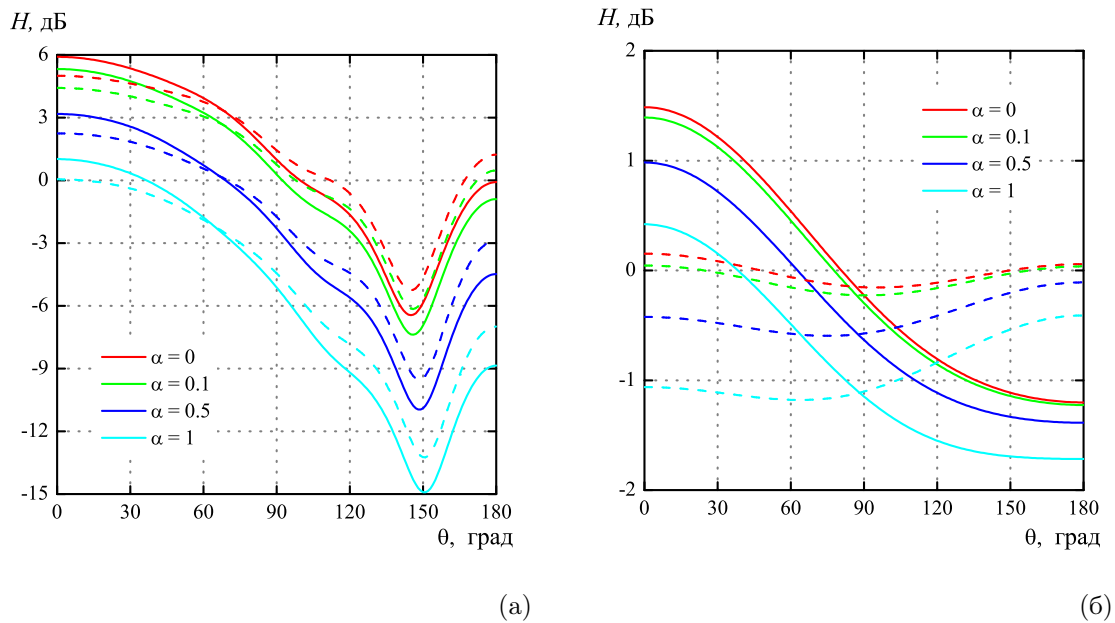


Рис. 7. Нормированная функция  $H$  на поверхности одиночной сферы радиуса  $a = 8.25 \cdot 10^{-2}$  м (а) и  $a = 8.25 \cdot 10^{-3}$  м (б) в зависимости от угла  $\theta$  для различных значений величины  $\alpha$ . Сплошные линии — случай монополюсного источника, расположенного на расстоянии  $\rho_{in} = 10$  от центра сферы; штриховые линии — случай плоской волны

Значения величин  $V_0$  и  $|p_0|$  можно взять единичными, так как при вычислениях искомых величин они сокращаются и не влияют на конечный результат.

Была рассчитана переходная функция  $H$  по формуле (16), значения функций для которой определялись с помощью выражений (11), (12) для первых  $M$  мод для каждого разложения. Число усечения  $M$  вычислялось по формуле (17). Для расчета специальных функций и их производных  $h_l(z)$ ,  $h'_l(z)$ ,  $j_l(z)$ ,  $P_l(z)$  были адаптированы программные коды, представленные в книге [6], которые были написаны на языке Fortran77. Результаты численных расчетов показали хорошее согласие с результатами расчетов, представленных в работе [2], в которой также было проведено сравнение с результатами, полученными по методу граничных элементов и по методу, предложенному в работе [4].

На рис. 7 представлено значение нормированной переходной функции  $H$  на поверхности сферы, рассчитанной по формуле (16) для различных значений комплексного сопротивления сферы  $\sigma = ak$ , в зависимости от угла  $\theta$  при двух значениях ее радиуса:  $a = 8.25$  см (рис. 7(а)) и  $a = 8.25$  мм (рис. 7(б)). Показаны два рассматриваемых случая внешнего воздействия: монополюсный источник излучения, расположенный на расстоянии  $d = 10a$  (сплошные линии), и плоская волна (штриховые линии). На рис. 8 для большей наглядности представ-

лены диаграммы распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вокруг одиночной жесткой сферы радиуса  $a = 8.25$  см при воздействии монополюсного источника на расстоянии  $d = 10a$  от центра сферы (рис. 8(а)) и при прохождении плоской волны (рис. 8(б)). А на рис. 9 представлена нормированная амплитуда давления вблизи жесткой/мягкой сферы на оси  $Oy$  (при  $y = 0$ ) для двух рассматриваемых внешних воздействий при значениях радиуса сферы  $a = 8.25$  см (рис. 9(а)) и  $a = 8.25$  мм (рис. 9(б)).

Из рис. 7 видно, что с уменьшением радиуса потенциал на поверхности сферы сглаживается и становится монотонным как в случае плоской волны, так и в случае монополюсного источника излучения (несмотря на то, что осредненное расстояние  $\rho_{in}$  не меняется). Таким образом имеем, что при уменьшении размера сферы ее реакция на внешний источник излучения также уменьшается при остальных фиксированных параметрах системы. Для объяснения данного факта рассмотрим чему равны полные сечения рассеяния в каждом случае.

При радиусе пузырька  $a = 8.25 \cdot 10^{-2}$  м волновой радиус  $ka \approx 3$ , тогда осредненное значение полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$  для монополюсного источника излучения согласно формуле (24) будет равно  $\approx 1.035$ , то есть сечение рассеяния приблизительно равно максимальному сечению самой сфе-

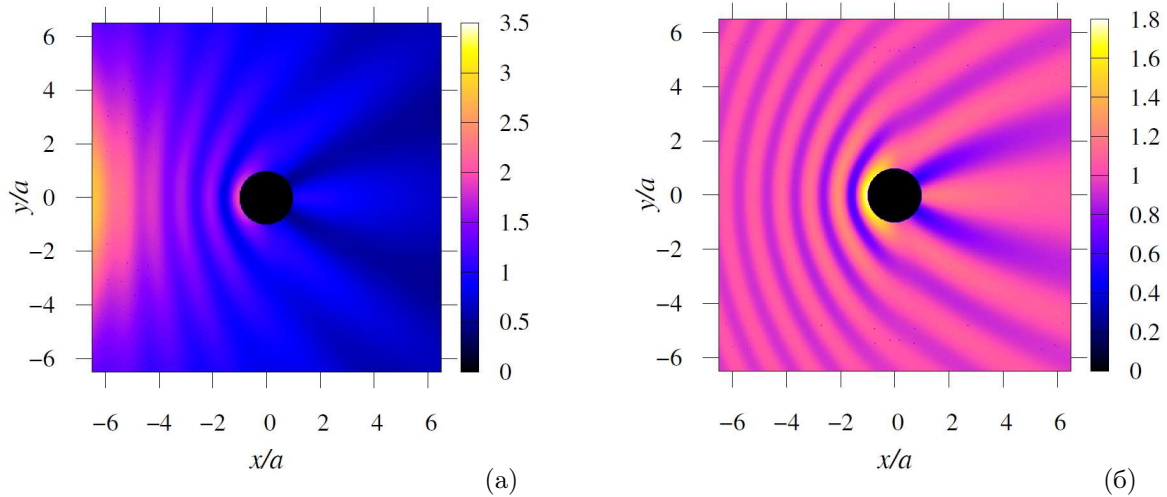


Рис. 8. Диаграмма распределения модуля нормированного давления вокруг одиночной жесткой сферы ( $\sigma = 0$ ) радиуса  $a = 8.25 \cdot 10^{-2}$  м при монополюмном источнике излучения с  $\rho_{in} = 10$  (а) и при прохождении плоской волны (б)

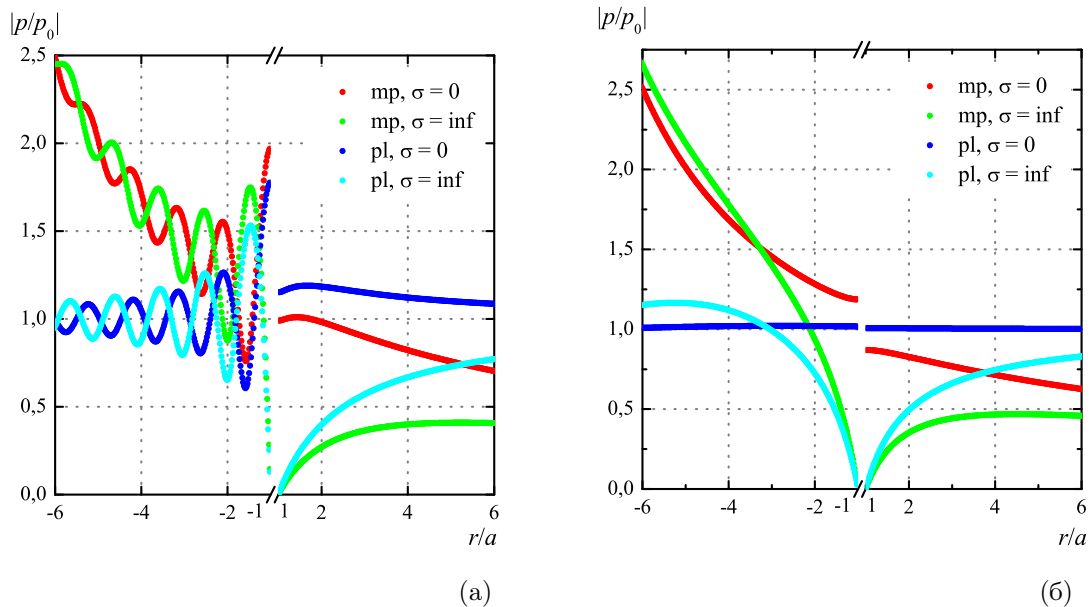


Рис. 9. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночной сферы радиуса  $a = 8.25 \cdot 10^{-2}$  м (а) и  $a = 8.25 \cdot 10^{-3}$  м (б) на оси  $Oy$  (значения  $-6 \leq r/a \leq -1$  соответствуют углу  $\theta = 0^\circ$ ; значения  $1 \leq r/a \leq 6$  —  $\theta = 180^\circ$ ) в случаях жесткой ( $\sigma = 0$ ) и мягкой ( $\sigma = \text{inf} = \infty$ ) сфер. Обозначения: mp — монополюмный источник при значении  $\rho_{in} = 10$ ; pl — плоская волна



ры. Для плоской волны результат будет аналогичный, т.к. модуль разности данной величины, рассчитанной по формулам (24) и (21), равен  $\approx 1.8 \cdot 10^3$ . На рис. 8 видно, что отраженная волна от сферы сильно искажает окружающее поле в обоих случаях. Заметим, что в точке, противоположной направлению падающей волны ( $\theta = 180^\circ$ ), отсутствует «тенева» зона. Данная «освещенная» зона за сферой называется пятном Пуассона [1]. Видно, что в случае плоской волны данный эффект более выражен. Наличие пятна объясняется тем, что на полупрямой  $\theta = 180^\circ$  сходятся, имея одинаковую фазу, дифракционные волны от всех точек экватора сферы. «Теневая» зона имеет место на полупрямых  $\theta \approx 150^\circ$  (на рис. 7(а) данная зона соответствует минимуму функции  $H$ ).

При радиусе пузырька  $a = 8.25 \cdot 10^{-3}$  м волновой радиус равен  $ka \approx 0.3$ , тогда среднее значение полного сечения рассеяния равно  $\sigma_s / (\pi a^2) \approx 6.08 \cdot 10^{-3}$  при монополюсном источнике (модуль разности при сравнении со случаем плоской волны равен  $\approx 2.8 \cdot 10^{-4}$ ), то есть сечение рассеяния на три порядка меньше максимального сечения сферы. Следовательно, в данном случае наличие сферы практически не искажает окружающее поле.

## 6. Заключение

В работе проведено исследование рассеяния от одиночной сферы при условии, что волна внутрь сферы не проходит, для двух видов внешнего воздействия: монополюсного источника излучения и плоской волны. Представлена методика разложения по мультиполям в случае произвольного акустического импеданса сферы в соответствии с работой [2], которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время. Получены формулы разложения для двух частных случаев внешнего поля. Проведено сравнение результатов расчетов настоящей работы с экспериментальными данными работы [4],

которое дало хорошее соответствие.

Получены формулы для основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния для сферы с произвольным акустическим импедансом. Показана зависимость данной характеристики от основных параметров (радиус сферы и комплексное сопротивление сферы) системы «сфера — окружающая среда» для двух видов падающего поля.

Проведен численный параметрический анализ значения потенциала на поверхности сферы для различных значений ее радиуса, комплексного сопротивления, вида внешнего воздействия. Показана связь между полученными результатами и полным сечением рассеяния на примере жесткой сферы.

Полученные результаты в дальнейшем будут обобщены на случай акустического рассеяния от звукопроницаемой сферы, т.е. сферы, через поверхность которой проходит волна (случай жидкой капли или воздушного пузырька), а также рассеяния от множества сфер.

## Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацьпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [4] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058.
- [5] Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение. 1989. 304 с.
- [6] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.

# Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence

**Nasibullaeva E.Sh.**

Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa

The scattering from a single soundproof sphere is investigated during the passage of two types of waves: a spherical wave from a monopole radiation source and a plane wave. In solving the Helmholtz equation, a numerical technique based on the fast method of multipoles is used, which allows achieving high accuracy of the results obtained, and also minimizing computer time. The calculations are compared with known experimental data and a good agreement is obtained. Formulas are obtained for the main characteristic of the scattering field (the total scattering cross-section) for a sphere with an arbitrary acoustic impedance. Its dependence on the main parameters of the "sphere – environment" system for two kinds of the incident field is shown. A numerical parametric analysis of the value of the potential on the surface of a sphere for different values of its radius, complex impedance, the type of external influence, etc.

**Keywords:** scattering, monopole radiation source, plane wave, single sphere, total scattering cross-section

